Э. Кольман

История математики в древности

Э. Кольман — История математики в древности

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

Э. КОЛЬМАН, А. П. ЮШКЕВИЧ

МАТЕМАТИКА ДО ЭПОХИ ВОЗРОЖДЕНИЯ

Э. КОЛЬМАН

История математики в древности

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1961

Ответственный редактор
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

АННОТАЦИЯ

В книге содержится обзор развития математики у народов, создавших древнейшие цивилизации (египтяне, вавилоняне, финикияне, евреи, майя, инки, ацтеки), в Древней Греции, эллинистических государствах и странах Римской империи.

Настоящая книга и книга А. П. Юшкевича «История математики в средние века» (1961 г.) составляют общий труд, название которого — «Математика до эпохи Возрождения» — отражено на контртитуле. Этот труд вместе с выпущенной Физматгизом в 1960 году книгой Г. Вилейтнера «История математики от Декарта до середины XIX столетия» охватывают историю развития математики от ее зарождения до 1850 года.

Помимо специалистов по истории науки, книга будет полезна студентам университетов и педагогических институтов, а также любителям математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом настоящего труда является история математики до начала эпохи Возрождения.

В вопросе о периодизации истории математики авторы руководствуются принципом восхождения этой науки от одной ступени абстракции к другой, более высокой, учитывая при этом разнообразие социальных, экономических и географических условий. Основные черты такой периодизации выражены А. Н. Колмогоровым в статье «Математика», напечатанной в 26-м томе второго издания Большой Советской Энциклопедии. Таким образом, можно сказать, что в предлагаемом труде рассмотрены период зарождения математики (в первых двух главах) и период элементарной математики (в остальных семи главах).

Работа состоит из двух книг. Первая книга, написанная Э. Кольманом, посвящена истории математики в древности. Здесь рассматривается возникновение математических понятий и развитие математики у народов, создавших древнейшие цивилизации (египтяне, вавилоняне, финикияне, евреи, майя, инки, ацтеки; о математике древних китайцев и индийцев речь идет в главах второй книги, специально посвященных этим странам); далее рассматривается история математики в Древней Греции, эллинистических государствах и странах Римской империи.

Вторая книга, написанная А. П. Юшкевичем, посвящена истории математики в Средние века — в Китае и Индии (начиная с древности), странах ислама (арабские страны, Средняя Азия, Иран, Азербайджан) и Европе. Изложение истории математики на Востоке дано в соответствии с недавними исследованиями, которые не только раскрыли многие неизвестные ранее факты, но и привели к новому представлению об этой эпохе в истории математики. Естественно, что эти главы имеют относительно больший объем, чем было принято ранее. Отдельные небольшие части текста в первой книге принадлежат А. П. Юшкевичу, а во второй — Э. Кольману.

Изложение доведено до начала XVI в. Хотя период элементарной математики заканчивается только в XVI в., авторы сочли правильным остановиться на предыдущем столетии, так как в XVI в. в недрах новой алгебры уже подготовлялось открытие исчисления бесконечно малых и аналитической геометрии и деятельность ряда ученых, особенно Виета, непосредственно содействовала становлению математики переменных величин, учения о функциях и геометрических преобразованиях.

Авторы более всего ставили своей целью выяснить историческое развитие основных математических понятий, методов и алгоритмов, учитывая по возможности тенденции современного развития науки. Новые задачи, стоящие перед наукой, приводят к изменению исторической перспективы прошлого, например, бурное развитие вычислительной математики ставит теперь перед историками задачу более полного освещения приближенных методов вычислений, начиная с древности.

Только что названной цели мы подчинили освещение творчества отдельных ученых. Развитие математики можно прослеживать в различных планах. Можно сделать упор на внутренние связи в творчестве одного человека, можно прослеживать историю проблемы, оставляя или почти оставляя в стороне ее связи с другими, можно говорить об истории научной школы и пр. В нашей книге, посвященной развитию математики как единого целого, мы, стремясь не отходить от указанной цели, вместе с тем держали в сфере внимания взаимосвязи математики и естествознания, математики и техники, математики и философии, а также, при должном учете национальных особенностей развития науки в то или иное время, — связи международные. Это невольно определило известную многоплановость изложения в различных частях и отделах труда; мы не говорим уже о чисто индивидуальных особенностях, свойственных авторам. При всем том, руководящим положением было то, что специфичность математики как науки состоит в особой общности и абстрактности ее понятий и методов, что, развиваясь под влиянием практической деятельности людей и потребностей общества (причем иногда это влияние проявляется непосредственно, иногда — только в конечном счете), она имеет возможность в той или иной мере развивать раз созданные абстракции самостоятельно.

Литература по истории математики громадна, но обобщающих трудов, написанных с позиций марксизма, пока почти не имеется. Поэтому авторам многие вопросы приходилось решать впервые. Разумеется, мы не считаем свои ответы и решения окончательными.

Несколько замечаний о характере изложения. Ссылки на литературу в тексте сделаны в квадратных скобках, сама литература, в том числе издания первоисточников, приведена в конце каждой книги под названием «Библиография». Оригинальная транскрипция имен ученых, о которых говорится в книге, дана в именном указателе, причем для ученых Востока — русскими буквами. Слова в квадратных скобках в цитатах принадлежат нам или переводчикам соответствующих текстов.

Авторы благодарны проф. Б. А. Розенфельду, прочитавшему всю рукопись и корректуры и сделавшему ряд очень ценных указаний.

Авторы просят читателей направлять свои замечания и пожелания в адрес Государственного издательства физико-математической литературы: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Москва,
24 февраля 1958 г.

Э. Кольман
А. П. Юшкевич

ГЛАВА I

ЗАРОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИКИ

Время зарождения математики. Зарождение простейших математических понятий — понятий пространственных форм и количественных отношений — произошло на самой заре истории человечества. Оно неразрывно связано с временем, когда в начале четвертичного периода человек начинает добывать средства существования с помощью орудий труда.

Благодаря труду и вместе с ним членораздельной речи, мозг и органы чувств человека достигли значительного совершенства. Мозг выработал способность создавать абстракции, необходимые для измерения и счета.

Изучение зарождения и развития понятий протяженности и числа, столь важных для человеческого мышления, имеет громадное значение не только для истории математики, но и для истории познания в целом, ибо оно подтверждает материалистическую диалектическую теорию познания, на что обратил внимание В. И. Ленин, указав, что «продолжение дела Гегеля и Маркса должно состоять в *диалектической* обработке истории человеческой мысли, науки и техники» ([8], стр. 122).

В буржуазной науке распространен взгляд, будто простейшие математические представления имеются уже у животных. Так, известный немецкий математик М. Кантор писал, что «счет, поскольку под ним подразумевают лишь сознательное сведе́ние воедино определенных сущностей, не составляет особенности человека, ибо утка также считает своих утят» ([21], т. I). Некоторые ссылаются, например, на то, что форма пчелиных сот наилучшим образом решает задачу о заполнении пространства шестигранными призмами постоянной высоты наибольшего объема при наименьшей затрате материала. Но для решения этой задачи требуются знания высшей математики, которые даже сторонники критикуемого взгляда не решаются предполагать у пчел. Однако, как отметил Маркс, «паук совершает операции, напоминающие операции ткача, и пчела постройкой своих восковых ячеек посрамляет некоторых людей — архитекторов. Но и самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове» ([1], стр. 185).

Учением И. П. Павлова ([35], стр. 490) доказано, что животные неспособны создавать абстракции, что наблюдающееся иногда у них различение количественных множественностей «много» и «мало» и пространственных форм «прямой» и «кривой» вызвано либо наследственными инстинктами, либо условными рефлексами вследствие длительных упражнений. Приписывая животным способность образовывать математические представления и даже понятия, буржуазная наука желает тем самым подкрепить идеалистическое учение о якобы чисто духовном происхождении этих понятий. Они якобы даны человеку от рождения, содержатся в его душе, а не возникли из материального опыта.

С зарождением простейшей хозяйственной деятельности требовалась какая-то, хотя бы крайне грубая, оценка величины предметов, и какой-то счет их — пусть весьма несовершенный и ограниченный. И действительно, археологические памятники неопровержимо доказывают, что человек выработал первоначальные арифметические и геометрические понятия уже в каменном веке.

О раннем зарождении математических понятий можно судить и по языкам племен, сохранившим благодаря большой устойчивости, свойственной языку, остатки терминологии первобытной культуры. Так, например, у вымирающего охотничьего индейского племени абипонов в Аргентине путешественники обнаружили в начале прошлого века числительные для 1 — «инитара» и 2 — «иньоака». Число 3 они выражали как «иньоака-инитара», число 4 как «пальцы страуса», 5 — «пальцы руки», 10 — «пальцы обеих рук», 20 — «пальцы рук и ног» [36].

Однако путешественники — среди них было много миссионеров, — исходя из своего предвзятого взгляда на «дикарей», приходили к выводу, что раз у этих племен нет числительных выше 2, то они не умеют считать. Так распространилось в буржуазной науке утверждение, что зачатки счета появились якобы лишь на сравнительно высокой ступени культуры, утверждение столь же неверное, как и другое, противоположное ему, приписывающее счет животным. Французский социолог Леви-Брюль ([37], [38]) и его последователи приписывают примитивному человеку «дологическое» — хаотическое «комплексное» и мистическое мышление, непригодное для математических действий, даже самых простейших. Нетрудно понять, что подобные рассуждения объективно оправдывали колонизаторское отношение к «дикарям».

Первые числительные. Научное, материалистическое объяснение зарождения математики исходит из рассмотрения социально-экономических условий, в которых возникли и развивались математические понятия, проходя через различные стадии на различных этапах общественной истории. «Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития», — писал Энгельс ([2], стр. 37).

Вещественные остатки труда дают возможность судить не только о первобытной материальной культуре, но и о духовном мире первобытных людей.

Даже простейшее орудие — каменное рубило — не могло возникнуть без мышления. Мышление первобытного человека было скудно, ограниченно, охватывало узкий круг предметов и действий; оно не было абстрактно, а тем более фантастично. В языках племен, находящихся на низкой ступени развития, словарный состав ограничен понятиями, отражающими почти исключительно их производственную деятельность; он чрезвычайно богат конкретными названиями (например, отдельных видов животных), но не содержит общих терминов (например, «животное»).

Даже тогда, когда первобытный человек успел накопить довольно много естественнонаучных и технических сведений, его математические знания были по сравнению с этим весьма ограничены. У него, собственно, редко возникала надобность считать, а тем более большие количества. Поэтому счет и число находились в зачаточном состоянии, доходя лишь до 2 или до 3 — все, что было больше этого, первобытному человеку представлялось как «много». Эта ограниченность в понятиях о числе проявилась при самом появлении числительных. Первоначально человек образовал лишь числительные «один» и «два», имевшее смысл «много». При этом числительное «два» имело качественное происхождение — это была какая-то конкретная естественная пара: рук, ног, глаз, крыльев, верхнего и нижнего рядов зубов и т. п. О том, что когда-то число 2 занимало особое место, мы судим по тому, что в ряде языков, наряду с множественным, сохранилось грамматическое двойственное число (например, в греческом, кельтском, в семитических языках, в древнеславянском);

по-русски говорят «2, 3, 4 руки», что является остатком двойственного числа в отличие от «5, 6,... рук» в множественном числе. В чешском языке говорят «4 руки», но «2 руце». Конкретное первоначальное происхождение числительного «два» в семитических языках ясно показывает сходство слов «два» и «зубы» (верхний и нижний ряд зубов) — «шинаим». В древнеегипетском языке имелось, а в языках некоторых австралийских племен имеется наряду с двойственным и тройственное число. На этой ступени развития числительные были просто прилагательными, образованными от предметов, встречающихся всегда в определенных количествах.

Чем больше усложнялась и расширялась хозяйственная деятельность первобытного человека, тем чаще приходилось ему считать и тем больше становились сосчитываемые количества. Так возникла потребность все больше и больше расширять числовую область. Сначала для этой цели служило простое повторение уже имеющихся низших числительных. Этим способом первоначально выражалось множественное число вообще, что сохранилось и до сих пор в некоторых языках. Так и сейчас выражают числительные многие австралийские племена, например, обитающие в бухте Купера ([39], стр. 26): 1 — «гуна», 2 — «баркула», 3 — «баркула-гуна», 4 — «баркула-баркула». В некоторых языках множественное число образуется простым повторением, например, на языке хинди «бхай» — брат, «бхай-бхай» — братья («хинди — руси бхай-бхай»).

В этих и подобных случаях выражения числительных имеет место простое повторение; нет основания говорить о «сложении», как это делают некоторые буржуазные историки математики, склонные неисторически «модернизировать» — подменять прежние понятия современными.

Значительно бо́льшую необходимость количественных оценок вызвали зародившиеся позднее формы обмена. Обмен продуктами питания, кремневыми изделиями, а затем и украшениями, пока существовал материнский род, при зачаточных формах земледелия и скотоводства, носил сначала лишь случайный характер. Позднее, когда материнский род сменился отцовским, при пастушестве и хлебопашестве, установился регулярный групповой обмен как между отдельными родами, так и племенами. Первоначально обмен не носил характера сделки. Только постепенно обмен стал строиться на стоимостной оценке обмениваемых продуктов.

На этих этапах, которые в общих чертах можно проследить даже у современных народов, стоящих на низкой ступени общественного развития, сравнение обмениваемых предметов было чисто наглядным и происходило путем выкладывания их в ряды, друг против друга. Так, например, Дж. Морган описывает процедуру обмена запасами угрей и кореньев между двумя австралийскими племенами на юго-востоке материка. Двое мужчин с каждой стороны приносили угрей и коренья на длинных кусках коры. Затем они переносили их на голове с одной стороны на другую, пока все количество не было обменено [40]. Остатки этого способа сохранились и у некоторых африканских племен, находящихся на значительно более высокой ступени культуры, чем австралийцы ([41], стр. 52).

Эти примеры показывают, что во время обмена, при сравнении обмениваемых множеств, первоначально не считали количество их элементов, а чувственно-наглядно устанавливали взаимно однозначное соответствие этих элементов (например, угрей и кореньев, или хлебов и пятерок прутиков). Разумеется, само понятие взаимно однозначного соответствия при этом не осознавалось. Потребовалось длительное развитие математики и всей абстрагирующей способности человека, чтобы понятие взаимно однозначного соответствия элементов равномощных множеств, — *исторически* одно из первичных, — в наше время было положено в *логическую* основу определения количественного числа.

Лишь при дальнейшем развитии, длившемся десятки тысяч лет, устанавливалась более или менее устойчивая меновая стоимость, причем, однако, представление о качестве обмениваемых предметов, их массе, размерах, весе и т. п. еще не играло решающей роли. Так, например, в «Илиаде» указывается соотношение: 1 медный треножник = 12 волам = 3 рабыням:

Третьи призы Ахиллес после этого вынес, данайцам
Их показавши, — призы за борьбу, сопряженную с мукой.
Первый приз — треножник большой для огня. Тот треножник
Между собою ахейцы в двенадцать быков оценили.
Для побежденного мужа он женщину вывел, в работах
Многих искусную; эту в четыре быка оценили ([42], стр. 504).

Представление об изменении стоимости в зависимости от качества возникло еще позже и это повлекло за собой дальнейшее развитие счета и идеи числа. Но если возникновение и развитие счета расширяло возможности обмена, то и, наоборот, запросы менового оборота содействовали дальнейшему развитию счетных способностей человека.

Дальнейшее развитие числительных. Необходимость считать большие количества, и в особенности запоминать их, сделали прежний способ счета при помощи повторения низших числительных непригодным. Высшим числам даются особые названия, возникают высшие числительные. Этот процесс образования новых числительных продолжался до определенной границы и затем останавливался; крайним числом было теперь уже не 2 или 3, а 5, 6 или 10, 12 и даже 20. Количества, лежащие за границей крайнего числа, воспринимались как неопределенное «много»; в случае надобности счет таких количеств велся при помощи повторения новых низших числительных. У некоторых народов этот процесс происходил два, а то и три раза: сначала наивысшим числительным было, например, 2, позднее 5 и, наконец, 10.

Остается выяснить, откуда брались названия новых числительных и чем определялась граница счета.

Как уже сказано, первобытный человек индивидуализировал предметы, давал название, например, каждой голове скота. Поэтому и число первоначально воспринималось им как непосредственное представление множественности, неотделимое от других, преимущественно пространственных представлений, например, «горсть», «охапка», «куча» и т. п. Это показывают языки племен, отставших в своем развитии. Но и в ряде высокоразвитых языков, таких, как китайский, японский, персидский и др., имеются особые счетные слова, употребляемые при счете предметов в зависимости от того, к какому классу эти предметы принадлежат. Так, в китайском языке между названием предмета и числительным вставляется «тоу» — «голова» для счета скота и как окончание названия круглых предметов; «би» — «рукоятка» для инструментов, «жен» — «корень» для веревок, ниток, поясов, ремней; «лин» — для дроби, капель, мелких предметов и т. д. [43]. В русском языке также сохранились счетные слова в таких оборотах, как «шесть душ детей», «пять штук яблок», «четыре куска сахару» и т. п.

Здесь ясно видно, что при своем зарождении понятие числа, ставшее затем основой арифметики, не только имело конкретный характер, но и было неотделимо от понятия измерения, легшего позднее в основу геометрии. В процессе дальнейшего развития математики эти понятия все больше дифференцируются, и вместе с тем, каждый раз на новом, высшем этапе происходит их объединение.

Первоначальный конкретный характер представления числовой множественности подтверждают и данные детской психологии, поскольку в процессе психического развития ребенка, так же как и в процессе исторического развития психики, происходит переход от менее развитой к более развитой психике. Из наблюдений над детьми в первые месяцы второго года вытекает, что числовая множественность воспринимается ими совокупно как целое, как постоянное соединение, данное природой или практикой.

Конкретный характер первоначального представления числовой множественности ясно показывает, что споры о том, воспринималось ли число сначала как порядковое (например, «четвертый») или как количественное (например, «четыре»),— схоластичны. Известно, что первичные элементы мышления можно с одинаковым правом считать как суждениями, так и понятиями. Первоначальные элементы языка были одинаково и существительными, и прилагательными, и глаголами. Подобно этому и первичные числовые представления были столь же порядковые, как и количественные.

Конкретное восприятие числового количества относится все еще к предыстории счета. Собственная история счета начинается лишь тогда, когда счет сопровождает материальную манипуляцию откладывания, перекладывания, прибавления и т. п., конкретно проводимую с самими предметами. Так, о некоторых южноафриканских племенах известно, что считающий предметы дотрагивается до каждого из них по очереди пальцами, начиная с мизинца левой руки. Аналогично поступают и некоторые племена в других частях света.

Н. Н. Миклухо-Маклай ([44], стр. 280) описал способ счета у жителей Новой Гвинеи:

«Папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например, «бе, бе, бе»... Досчитав до пяти, он говорит «ибон-бе» (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет «бе, бе»..., пока не доходит до «ибон-али» (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая «бе, бе»..., пока не доходит до «самба-бе» и «самба-али» (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого».

Всякий счет есть, таким образом, в своей основе первоначально счет двигательный, совершающийся с помощью конечностей, пальцев и их суставов. Ручной счет сыграл в развитии счета столь же важную роль, как открытие огня в общем развитии первобытного человека.

Пальцы рук и ног, служившие первоначально лишь для показывания и установления взаимно однозначного соответствия при обмене предмета на предмет, превратились затем в знаки для запоминания отложенного количества, в «заместителей» отсчитываемых предметов. Так был проложен путь для образования и других подобных «заместителей» — ими стали камешки, раковины, которые в процессе счета откладывали в кучки, или же зарубки по числу убитых зверей, узлы на веревке и т. п. У охотничьих племен этот способ счета оставил следы и до наших дней. Он сохранился и в виде жетонов, фишек, четок, а также бирок; узелок на платке «для памяти» также унаследован нами от этого времени.

Счет на пальцах, создание чувственно-наглядных «заместителей» понятий, являлся исторически первым примером моделирования одних процессов при помощи других, в том числе и моделирования логических действий. Эта идея, конечно, лишь в зародыше имевшаяся в счете на пальцах и в бирках, стала затем плодотворным методом развития естествознания. В новейшее время, с созданием быстродействующих электронных вычислительных машин, контролирующих и управляющих автоматов, эта идея составляет одну из основных идей кибернетической техники, знаменующей собой величайшую рационализацию умственного труда, подлинную техническую революцию.

Мы знаем, что название некоторых числительных в ряде языков сходно с названием руки, ноги и т. п. — например, русское «пять» и «пясть» (кулак по-древнеславянски); малайское «лима» означает одновременно и «рука» и «пять» и т. д. Известно также, что самыми распространенными системами счета являются системы с основаниями 10 и 5. Все это дало повод к возникновению ошибочного, широко распространенного взгляда, отождествляющего зарождение счета на пальцах с зарождением количественных понятий вообще. Но, как мы видели, потребовались десятки тысяч лет для того, чтобы человек от первичных количественных понятий поднялся к счету на пальцах.

Другое неверное объяснение происхождения числительных предлагает субъективно-идеалистическая теория Липперта [45]. Она утверждает, что числительные «один», «два», «три» происходят от личных местоимений «я», «ты», «он», объясняя это тем, что первобытный человек сосредоточивал будто бы все свои мысли на себе самом, противопоставлял себя как «единицу» неопределенному понятию множества и т. д. Однако необоснованность этого взгляда, приписывающего первобытному человеку не свойственную ему склонность к самонаблюдению, видна также из того, что ни в одном из тысяч известных нам языков нельзя проследить указанного мнимого родства между числительными и местоимениями.

Неверна также «биологическая» теория Вундта [46], утверждающая, будто системы счисления, имеющие основанием 2, 4, 8, возникли в результате фактора размножения тогда, когда племя, распространяясь на большую область, естественно делилось на две части, отличающиеся друг от друга своим тотемом. Но как раз потребность в счете имелась давно уже внутри племени; она определялась возможностью запасаться и умением хранить продукты, наличием производства для сбыта, первобытного обмена и достаточного количества однородных продуктов, а отнюдь не связывалась лишь с делением племени, наступившим, как известно, значительно позже.

Наконец, Кэджори «объясняет» различия в системах счисления у разных народов, исходя из лженаучной «теории» «высших» и «низших» рас. Он заявляет, что «пятеричная и двадцатиричная системы наиболее часто встречаются у низших рас, тогда как народы, стоящие выше, обыкновенно избегали первой из этих систем как слишком скудной, второй как слишком громоздкой» [11]. Но это утверждение, как мы покажем дальше, противоречит историческим фактам.

С усложнением социально-экономических условий жизни человека все больше развивались и его способности к абстрактному мышлению. Вместе с тем постепенно терялся первоначальный конкретный характер числительных. Слово, означавшее до того одновременно и конкретный предмет и числительное, сохраняло теперь лишь второе значение. В то же время существовавшая при первобытном хозяйстве крайняя разноголосица в наименованиях числительных понемногу сглаживалась. В итоге названия числительных стали однозначными (за исключением упомянутого уже явления счетных слов и родов числительных по классам, синонимов среди числительных не наблюдается), и в языках этнически родственных народов числительные, как правило, составляют наиболее четко выраженный, общий этим языкам элемент (например, в индоевропейских языках) ([47], стр. 82; [48], стр. 409).

Так образовалось, хотя и весьма медленно, в пределах племени или объединения племен некоторое упорядоченное единство числительных, связанных между собой благодаря наличию в этой системе высшей единицы. Речь идет о числе, которое было первоначально границей счисления вообще. Оно само, или следовавшее за ним число, не имеющее названия или называющееся «пыль», «звезды», у русских — «тьма», было сначала равнозначно понятию «много». Эта высшая единица превратилась затем в основание системы счисления. Числа, превышающие это основание, выражались с его помощью и с помощью низших числительных. Это могло осуществляться различными способами. В одних случаях, например во французском языке, для 17, 18, 19 сначала называлось основание, а после него соответствующее низшее числительное (18 dix-huit, т. е. «десять-восемь»). В других случаях сначала назывались низшие числительные, а затем основание, как это имеет место и в русском языке: «восемнадцать» — из «восемь на десять». Только что приведенные два случая отличаются не только порядком следования числительных (второй порядок, когда высшая единица предшествует низшей, более распространен), но и тем, что в первом случае числительные просто ставятся рядом, между тем как во втором они соединены союзом «на» (или, например, в немецком «und» — «и»). Во всех этих случаях с помощью слов здесь выражались действия, которые человек производил на пальцах одной или обеих рук, а иногда и ног.

Обыкновенно при счете на пальцах каждый палец составляет единицу, причем счет производился сначала на пальцах левой руки, при помощи пальцев правой руки, и только после того как пальцы левой руки были исчерпаны, счет переходил на правую руку, где он начинался с большого пальца. Так, например, когда зулусу нужно выразить число 6, он говорит «татизитупа», что означает «взять большой палец руки». Нетрудно догадаться, что говорящий сосчитал все пальцы на левой руке и начал теперь с большого пальца правой. Для того чтобы сообщить, что его хозяин купил 7 быков, он говорит «у комбиле», т. е. «он указал». Это означает, что при счете хозяин дошел до указательного пальца ([49], стр. 184).

Хотя указанный здесь способ ручного счета являлся преобладающим, имелись, однако, народы, у которых единицей счетного действия был (и даже частично остался до сих пор) сустав пальца. Так, например, короадосы Бразилии считают тройками, по числу суставов на каждом пальце левой руки (без большого пальца), т. е. до 12, затем каждый палец правой руки (включая большой) означает 12, благодаря чему счет продолжается до 60.

В случаях, когда счет происходил на целых пальцах, а этот способ счета был наиболее распространен, временной границей счета, естественно, оказывалось количество пальцев либо одной руки (иногда без большого пальца), либо обеих рук, а иногда рук и ног вместе взятых. Таким путем основой счисления чаще всего становились числа 5, 10 или 20, гораздо реже 4 или 9. Иногда после окончания счета на пальцах левой руки засчитывалась еще вся рука; так могла возникнуть система с основанием 6. Не исключена и другая возможность: может быть, эта система произошла от скрещения двух более древних систем с основаниями 2 и 3, подобно тому как система с основанием 12 могла быть получена скрещением систем с основаниями 3 и 4.

Если после окончания счета на пальцах обеих рук засчитывалась еще вся (правая) рука, — возникали системы с основанием 11, например у новозеландцев, в языке которых имеются слова для 11, 11^2 и 11^3, и где 12 выражается как «11 с 1» 13 как «11 с 2», 22 как «дважды 11» и т. д. Но девятиричная и одиннадцатиричная системы встречаются редко.

Понятно, что системы счисления с более высоким основанием возникли позже, чем с низшим. Благодаря развитию сношений между различными племенами, усилению обмена между ними, наименования числительных и системы счисления объединялись. Системы с низким основанием (как двоичная или пятеричная) оказались менее пригодными, чем десятеричная система, так как в них даже сравнительно небольшие числа выражались довольно громоздко. С другой стороны, и системы с высоким основанием, как двадцатиричная система, не оправдывались на практике, ибо они требовали запоминания большого числа особых слов — названий низших числительных. Таким образом, в процессе естественного отбора в подавляющем большинстве случаев выжила система счисления с основанием «средней» величины — десятичная система счисления. Значит, ее большая распространенность вовсе не свидетельствует о том, что пользующиеся ею народы принадлежат к «высшей расе». Наоборот, в языках этих народов имеются доказательства того, что когда-то и они пользовались системами счисления, якобы присущими лишь «низшим расам».

Отметим еще, что хотя десятичная система более удобна, чем пятеричная или двадцатиричная, она уступает двенадцатиричной системе. С чисто математической точки зрения последняя более выгодна потому, что ее основание 12 делится на 3 и 4, благодаря чему легко производить действия с часто встречающимися делениями окружности и времени. Двенадцатиричная система встречается у некоторых племен Центральной Африки; ее пережитком является счет по дюжинам, дюжинам дюжин — гроссам, дюжинам гроссов — «массам» для белья, посуды, писчебумажных товаров. В новейшее время совершенно неудобная для повседневной жизни двоичная система была применена с громадной выгодой для устройства быстродействующих электронных вычислительных машин. Хотя запись числа в двоичной системе требует в среднем в три раза больше знаков (0 и 1), чем запись этого же числа десятью знаками десятичной системы, это неудобство окупается тем, что машина не записывает знаки. В ней нулю соответствует отсутствие электрического импульса, единице — его наличие, а число импульсов, производимых в вакуумной трубке, насчитывается сотнями тысяч в секунду.

При объединении систем счисления иногда возникали смешанные системы с двумя основаниями, как, например, у некоторых племен североамериканских индейцев система пятерично-десятичная. Следы ступенчатого перехода от систем счисления с низшим основанием к системам с более высоким основанием заметны и в языках современных цивилизованных народов. Так, в русском языке о более древнем происхождении числительных «один», «два» свидетельствует то, что, в отличие от остальных числительных, не изменяющихся по родам, они образуют мужской, женский и средний род (в латыни это относится и к числительному «три»), т. е. рассматриваются как прилагательные.

Тот факт, что в русском языке числительное «сорок» не образуется по аналогии с числительными «тридцать», «пятьдесят» и т. д., а выражается особым словом, показывает, что прежде на Руси был распространен счет по сорока́м, и воспоминание об этом увековечено в современных числительных. В самом деле, известно, что соболи продавались по сорока́м, и многочисленные сохранившиеся обороты показывают, что «сорок», будучи основой счисления, употреблялось вместе с тем как «крайнее число» в смысле неопределенного множества ([50], стр. 28). В связи с тем, что в других славянских языках нет этой особенности, связанной с числительным для 40, а также из-за того, что она встречается в языках некоторых народов, соприкасавшихся с русскими, предполагают, что сороковая система счисления проникла на Русь извне. Сохранившиеся обороты, придающие числу 7 значение неопределенной множественности, например «семеро одного не ждут» и т. п., свидетельствуют (если они не позаимствованы) о том, что и число 7 рассматривалось когда-то древними славянами как стоящее за пределами системы счисления, по-видимому, шестиричной.

Иногда, но уже на более высоких ступенях развития, в системе счисления для образования числительных, превышающих основание, употреблялось не прибавление, а отнимание низших числительных. В русском счете имеется также эта особенность, ибо числительные 20, 30, ..., 80 образуются путем сложения, между тем как 90 при помощи вычитания. Не говорят «девятьдесят», а «девяносто», т. е. «девять (девятый десяток) до ста». Во многих урало-алтайских языках, например, «девять» понималось как «один из десяти»; в латыни 19 — unadeviginti, т. е. «один из двадцати», также и в санскрите и в древнегреческом. Дальнейшее развитие системы числительных связано с ее изображением при помощи знаков, в особенности письма.

Изучение географии распространения различных систем числительных дает возможность обнаружить некоторые закономерности. Если принять во внимание социально-экономические уклады, господствовавшие в той или другой местности, то значительную вероятность приобретает предположение, что пятеричные системы возникли в период материнского, а более сложные — десятичная и двадцатиричная — в период отцовского рода. Однако археологические, этнографические и лингвистические материалы не дают пока достаточно надежных оснований для того, чтобы приурочить отдельные этапы развития систем числительных и понятия числа вообще к более коротким периодам развития общества.

Числовые знаки. Уже на сравнительно ранних ступенях развития первобытной культуры, наряду со звуковой речью, человек пользовался не только сопровождающими ее жестами, выражающими прежде всего его эмоции. Существовал и своеобразный «язык сигналов». Знаками на песке или отметками на стволах и ветках деревьев охотник, преследующий дичь, показывал своим сородичам направление. Звук барабана, дым костра и т. п. передавали известия иногда на громадные расстояния. Томагавк или веревка с узелками, которые доставлял гонец из одной племенной группы в другую, оповещали о войне, охоте и т. д. Во всех этих случаях, впрочем, как и в устной речи, где между звуком «камень» и предметом камень нет никакого сходства, — мысль передавалась путем условных знаков — символов.

Привычка к такому «языку символов» довольно рано вызвала к жизни различные способы числовой записи. Без нее уже нельзя было обойтись. С развитием хозяйства, возможностью и необходимостью делать запасы, а также с развитием обмена, приходилось не только считать, но и запоминать сосчитанные количества. Первоначально лучшим средством для запоминания чисел оказался счет на пальцах.

Представим себе первобытного человека. Вот он сосчитал до 6, т. е. до большого пальца правой руки. Чтобы запомнить это число, ему достаточно запомнить этот палец, и тогда он может всегда, повторив счет до него, восстановить сосчитанное число. Но пальцы не были единственными «заменителями» подсчитываемых предметов. Зарубки на палке или кости, связка прутьев, куча камешков или раковин могли изображать число убитых зверей.

В 1937 г. в Чехословакии (деревня Вестонице в Моравии) в раскопках, относящихся к древнекаменному веку, была найдена лучевая кость молодого волка длиной в 18 *см*, на которой высечено 55 глубоких зарубок — параллельных черточек.

Первые 25 из них сгруппированы по пять, после чего ряд заканчивается зарубкой, которая в два раза длиннее остальных. Затем, опять-таки длинной зарубкой, начинается второй ряд из 30 зарубок. Этот древнейший математический документ — числовая запись пещерного человека — является прообразом бирок, счетных палочек, до сих пор широко применяемых охотничьими племенами на крайнем севере Сибири и Америки. Понятно, что от группирования черточек по пять нетрудно было перейти к введению особого знака для пятерки, которым первоначально и служило изображение этих черточек. В других случаях, например у инков, древнего культурного народа Перу, место бирок занимали квипу — цветные шнуры с узлами. Из квипу в государстве инков составлялись целые коллекции, соответствующие нашим бухгалтерским записям. Красный шнур служил для счета воинов, белый — для счета серебра, зеленый — хлеба. Узлы, в зависимости от своей сложности, имели значение 1, 10, 100 и 1000.

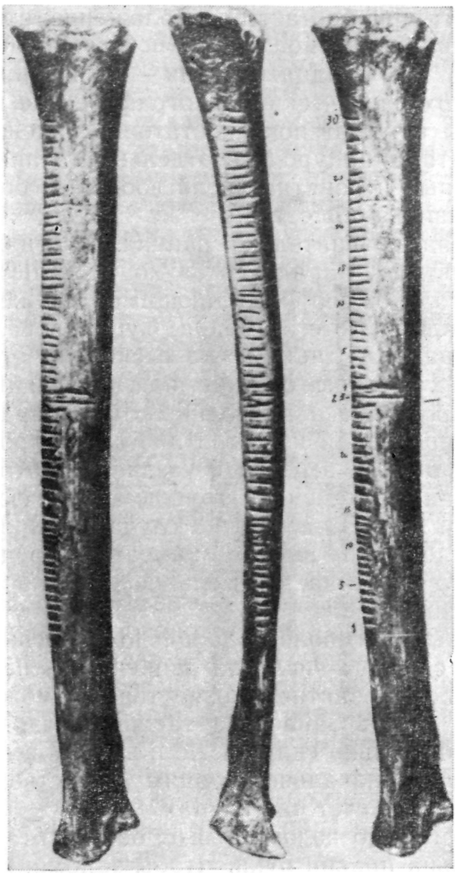


Рис. 1. Кости с зарубками.

Указать достоверно происхождение каждого числового знака в отдельности не всегда возможно. Так же как и в проблеме о происхождении наименования отдельных числительных в том или другом языке, мы находимся здесь в области гипотез. Так, например, утверждают, что арабское четыре —

«арба» произошло от слова, выражавшего понятие «четвероногого», в доказательство чего приводят родство этого слова с глаголом «раба'а», означающим «пастись» и «идти рысью». Убедительность подобных догадок зависит от достоверности положений того или другого направления сравнительного языкознания, легших в их основу, а поэтому весьма сомнительна.

Но не все, однако, выглядит так неопределенно. Мы можем, например, с уверенностью утверждать, что наши цифры 1, 2, 3 независимо от того, какими историческими путями они дошли до нас (об этом речь будет впереди), возникли из скорописной записи одной, двух, трех черточек. Римские цифры для этих же чисел воспроизводят черточки без изменений. Но мы знаем примеры и другого происхождения цифр: вероятно, что римская цифра «пять» возникла упрощением иероглифа, изображавшего руку. Наконец, пример третьего вида происхождения цифр дает нам римская цифра «сто», C, являющаяся начальной буквой латинского числительного centum. Указанные три способа происхождения числительных — из меток, из иероглифов и из букв (которые, как известно, сами возникли из иероглифов) встречаются у разных народов на разных исторических этапах. Иногда, как показывает пример с римскими цифрами, в окончательно установившейся системе записи чисел представлены все три способа, приведенные выше.

Иероглиф, обозначающий число, существенно ничем не отличается от иероглифа, обозначающего любое другое понятие. Числовые знаки возникли в большинстве случаев вместе с другой иероглифической письменностью, вернее, на ее основе. Значит, они несравненно более позднего происхождения, чем те цифры, которые произошли из меток. Почти у всех народов (кроме китайцев) первоначальное иероглифическое письмо, где каждый знак обозначал целое понятие, в языке сменилось звуковым письмом — слоговым, как в японском (употребляемым здесь вместе с иероглифами), или буквенным, как в русском языке. Некоторые исследователи, например М. Кантор, удивляются тому, что запись чисел осталась иероглифической — каждая цифра обозначает целое понятие. Но это объясняется очень просто, тем, что иероглиф — знак числа — служит не только для его записи, но связан с действиями над числами. А для математических действий короткий, легко обозримый иероглиф несравненно более пригоден, чем написанное буквами слово. По этой же причине в математике, при дальнейшем ее развитии, наблюдается даже, как мы еще увидим, тенденция, прямо противоположная развитию прочей письменности: если раньше математические действия записывались словами, то затем их стали обозначать особыми символами, вроде знака равенства «=», знака «+» для сложения и т. д.

Зарождение математических действий. Возможность отмечать и запоминать числа, — будь это при помощи пальцев, камешков, а тем более при помощи записи, — чрезвычайно содействовала развитию математического мышления вообще и математических действий в особенности. Не случайно латинское calculare — «считать», откуда наше «калькулировать» происходит от calculus — камешек, от которого происходят латинское название извести calcum и название химического элемента кальция. Да и само слово «число», как утверждает сравнительное языкознание, оказывается родственным с латинским ciselare — «чеканить», «гравировать» и имеет с ним общее происхождение от «производить зарубки, метки».

Сама операция счета долго представляла трудное, громоздкое и утомительное занятие. До сих пор некоторые народы, находящиеся и поныне на низких ступенях развития, производят счет больших чисел так: один человек откладывает на пальцах обеих рук единицы, второй — десятки, третий — сотни.

В течение тысячелетий единственными математическими действиями были сложение и вычитание (когда уменьшаемое больше, чем вычитаемое) небольших чисел. Постепенно возникло и умножение, сначала как удвоение, на что ясно указывает египетская математика, в которой умножение сводилось к сочетанию удвоения и сложения.

Умножение, как повторное сложение, давало результат, равнозначный результату многократного «оборачивания» — произведения длины и ширины. Не случайно у шумерийцев мерой площади служила наряду с квадратной и прямоугольная полоска в один локоть длины и один дюйм ширины. Таким образом, возникновение умножения было обусловлено зарождением земледелия и первоначально связывалось с геометрическими представлениями. Эти геометрические представления накладывали свой отпечаток и на чисто арифметические понятия, например, «квадратные числа», «треугольные числа» и т. п. Аналогично обстояло дело и у египтян и вавилонян — последние называли, например, произведение «а-ша», т. е. площадь. Авторы средневековых математических сочинений на арабском языке также называют произведение «поверхностью» («сатх»), имея в виду прямоугольник.

Значительно позже, чем умножение, появилось деление. Конечно, понятие $\frac{1}{2}$ возникло сравнительно рано. Но оно не связывалось с числом 2. Это нетрудно проверить: ведь чуть ли не во всех языках, так же как и в русском, слова «половина» и «два» не происходят от общего корня. Представление о том, что деление — действие, обратное умножению, утвердилось лишь в результате длительного развития математического мышления.

С появлением действия деления возникли и системы счисления, использующие его наряду со сложением и умножением. Так ведется счет в датском языке, где до 49 пользуются десятичной системой, а дальше — двадцатиричной, причем нечетные десятки выражаются как половины ближайших двадцаток. Например, 20 — tyve, 60 — trensindstyve (т. е. «трижды 20»), 50 — halvtrensindstyve (т. е. «половина из третьей двадцатки»). Нечто похожее есть и в русском языке, когда говорят «полтора» (т. е. «пол втора», «половина второго числа»). Говорили также «полтретья» $= 2\frac{1}{2}$, «полчетверта» $= 3\frac{1}{2}$, «полпята» $= 4\frac{1}{2}$ и т. п. В настоящее время это сохранилось в названиях времени, например в выражениях «пол второго» (1 час 30 мин.), «пол третьего» (2 часа 30 мин.) и т. д.

К этому более позднему периоду относится и возникновение понятия дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т. д. Как видно из слов, выражающих эти понятия, последние, в отличие от $\frac{1}{2}$, уже связывались с понятиями соответствующих целых чисел 3 и 4. Зарождение действия деления и понятия дробей тесно связано с процессом измерения, развившимся из материальных потребностей уже значительно продвинувшегося общества.

Возникновение геометрических понятий. Ученые-идеалисты обыкновенно утверждают, будто геометрические представления и понятия, как более конкретные, чем понятия чисто количественные, возникли благодаря тому, что данное человеку априори, до всякого материального опыта, абстрактное понятие числа стало впоследствии применяться для измерения величины. На самом деле, так же как и понятие числа и одновременно с ним, простейшие геометрические представления возникли из материальной практики. Условия производства, даже самого примитивного, а в дальнейшем и обмена требовали измерения пространственных величин, на первых порах пусть хоть самого неточного. Единицами измерения, весьма грубыми и неустойчивыми, служили чаще всего части человеческого тела. Название вроде «локоть», «стопа», «сажень» (то, что досягаемо — расстояние между концами пальцев рук, расставленных на ширину плеч), «дюйм» (по-немецки

Daumen — большой палец; ширина этого пальца), «фут» (по-английски foot — нога, ступня) и т. п. — как нельзя лучше убеждают нас в этом.

Уже в позднеледниковую эпоху человек выделывал «геометризированные» орудия, кремневые пластинки, имеющие форму треугольника, ромба или трапеции. Эти правильные формы возникли постепенно, как наиболее целесообразные, наиболее приспособленные к тому или другому трудовому процессу, производимому каменным рубилом, скребком, ножом и т. п.

Развитие геометрических представлений по-настоящему двинулось вперед с зарождением гончарного и ткацкого дела, строительной техники, с возникновением искусств. Остатки посуды новокаменного века, корзины, верши, сети и ткани приводят нас к убеждению, что у первобытных людей этой эпохи геометрическое чувство было уже высоко развито. Свои изделия они украшали орнаментами, сложными сочетаниями треугольников, повторяющихся прямоугольных спиралей (меандров), кругов, спиралей. Вглядываясь в некоторые из этих геометрических орнаментов, мы узнаем в них стилизованные фигуры животных и людей; вероятно, это имело связь с зародившимся в эту эпоху анимистическим миропониманием. Может показаться странным, что в орнаментах мы находим равенство, подобие и симметрию фигур. Ведь в абстрактном виде этих понятий, конечно, у первобытного человека еще не было. Подобное гармоническое построение фигур являлось не результатом рассуждения, а следствием подражания; здесь могло оказать влияние повторение ритмических движений производственной деятельности (например, копанья, сеянья и т. п.), в играх, подражание многообразным формам природы, четкая повторяющаяся ритмика танца. В более позднее время в геометрических орнаментах появились и числовые отношения, например, в виде разбиения большого треугольника на меньшие треугольники или заполнения треугольника кружочками, правильно размещенными по строкам. Так, запечатлены, например, «треугольные числа» 1; $3 = 1 + 2$; $6 = 1 + 2 + 3$; $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ и т. д., которым придавали «магический» смысл.

Превращение чисел в фетиш произошло тем же путем, как и вскрытое Марксом возникновение фетишизма вообще — этой исторически первоначальной формы религиозного верования. Понятие числа, — плод абстрагирующей деятельности человеческого мозга, — человек превратил затем в самостоятельную, сверхчувственную сущность. Сначала человек получил понятие числа как абстракцию от отдельных вещей. Потом он оторвал число от вещей и противопоставил его этим же вещам. И когда оно стояло перед ним как лишенная чувственности абстракция, он изумился ему и наделил его фантастической способностью приносить счастье или несчастье.

В буржуазной истории математики процветают «теории» о происхождении математических понятий из «магического» мышления и о мистическом понимании математики как двигателе ее развития. На деле же фетишизация математических понятий возникла не при самом их зарождении, а только с возникновением обмена. Она всегда оставалась лишь побочным продуктом развития математики — ее влияние на это развитие никакой решающей роли не играло.

Сооружение свайных домов в Средней Европе, больших жилищ американских индейцев и другое строительство не могло обходиться без практического знания зачатков механики (статики), без уменья проводить прямые и отвесные линии, проводить прямые под прямым углом. Эти действия осуществлялись при помощи натягивания веревок: древние греки так и называли египетских геометров «гарпедонаптай» — натягиватели веревок. Аналогичные названия имелись и в ассирийском и арабском языках. Представление о прямой линии тесно связано и с прядением и ткачеством, на что указывает, например, родство слова «линия» (из латинского языка) с названием льна (латинское linum, которое означало и льняную нить, и полотно, откуда «линолеум»).

Но особенно сильное влияние на развитие геометрических представлений оказало, когда оно появилось, земледелие. Если гончарная, ткацкая, а также строительная техника требовали в первую очередь измерения длин, то для земледелия нужно было измерение площадей и объемов. Измерялись площади земельных участков, емкость сосудов и амбаров, объем вынутой при земляных работах земли. Мы знаем из сохранившихся клинописных записей шумерийцев и вавилонян, что единицы измерения площади и объема были при своем возникновении связаны с материальными потребностями общества. Оказывается, иероглиф понятия «площадь» тождествен с иероглифом «количество зерна» (нужного для посева на ней); иероглиф понятия «объем» — с иероглифом «куча земли» (вынутой при производстве оросительных работ). Русская мера объема «ведро» также указывает на конкретный практический характер происхождения пространственных мер.

Значение зачатков астрономии. Уже племена первобытных кочевников-скотоводов при передвижении по бескрайним степям нуждались в ориентирах. Так начались их наблюдения за движением звезд. Смена дня и ночи и смена времен года были, несомненно, подмечены даже человеком каменного века. Они давали ему возможность благодаря своему закономерному повторению хотя бы приблизительно предугадывать наступление неблагоприятного холодного и благоприятного теплого времени. Правда, как показывают наблюдения над обитателями тропических лесов, они придают сравнительно мало значения не очень ощутимой там смене дня и ночи. Поэтому нельзя согласиться с высказываниями, утверждающими, будто счет времени играл решающую роль при самом возникновении понятия числа. Его влияние проявилось лишь на более высоких ступенях общественного развития. С переходом к земледелию зачатки знаний о видимом движении Солнца, Луны и звезд стали необходимы для регулирования полевых работ. Так, еще в раннюю эпоху пастушеских народов возник лунный календарь. Развитие обмена, а в связи с этим и мореплавания, привело к дальнейшему усовершенствованию астрономических знаний, крайне важных для ориентировки на море.

Но астрономические знания немыслимы без развития знаний математических. Вначале случайное, а впоследствии все более и более систематическое наблюдение небесного свода привело к ознакомлению со свойствами шара, круга и угловых направлений. Правда, круг в виде гончарного круга и колеса повозки был еще раньше известен многим народам. Но астрономическое понимание окружности как воображаемой линии, которую затем стали делить на равные части, проводить в ней хорды и т. д., было несравненно более глубоким. С зарождением астрономии геометрические понятия широко распространились на все трехмерное пространство, между тем как прежде, если не считать измерение простейших объемов, они в основном ограничивались лишь двумерной плоскостью.

Таким образом, завершился первый, начальный период развития математики, относящийся к доклассовому первобытному обществу — период зарождения ее основных, простейших понятий. Возникновение и развитие математики на этих ее первоначальных стадиях полностью подтвердили высказанное Энгельсом в «Анти-Дюринге» положение, что «как и все другие науки, математика возникла из *практических нужд* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики» ([2], стр. 37).

ГЛАВА II

МАТЕМАТИКА В РАННЕМ РАБОВЛАДЕЛЬЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Раннерабовладельческое общество. Начиная с VI тысячелетия до н. э., на громадном пространстве, от Египта на западе до Китая на востоке, постепенно совершалось разложение первобытно-общинного строя. С переходом от каменных орудий к медным и бронзовым, а затем и железным, вместе с усовершенствованием сельского хозяйства от последнего отделилось ремесло как самостоятельное занятие. Появилась частная собственность на средства производства, начало зарождаться классовое общество. С IV тысячелетия до н. э. в Египте и Месопотамии, в Китае и Индии, а позднее в Закавказье и в Средней Азии образовались и развивались деспотические рабовладельческие государства. Аналогичный процесс, хотя и значительно позже, происходил и в западном полушарии у индейских племен майя, инков и ацтеков.

Эта новая, более высокая форма общества зарождалась в благоприятных климатических условиях, чаще всего на берегах больших рек, где плодородная почва давала богатый урожай. Стесненные горами и пустынями, эти громадные оазисы не могли расширяться. Периодические разливы рек уничтожали результаты труда. Поэтому здесь широко развилось строительство дамб и каналов, осушение болот, устройство водоемов. Когда в дальнейшем в частную собственность превратилась и земля, руководство оросительными работами, равно как и регулирование водоснабжения, сосредоточивалось в органах власти, местной или государственной. Одновременно с развитием ремесла и торговли возникали города, отличающиеся значительным развитием строительной техники, в особенности укреплений, дворцов и храмов. Многочисленные войны привели к созданию военной техники.

Экономическую основу раннего рабовладельческого общества составляло натуральное хозяйство сельских общин, эксплуатируемых рабовладельцами, военачальниками, жрецами. Вместе с тем, города превратились в центры торговли, которая велась как караванными, так и морскими путями.

Вся эта сложная производственная экономическая и техническая деятельность требовала большого количества разносторонних знаний. Они были сосредоточены у особой группы должностных лиц, знатоков календаря и межевания, основ строительного дела и металлургии, медицины и сбора налогов. В некоторых из раннерабовладельческих обществ эта сторона государственной административной деятельности находилась в руках жрецов. К сословию управителей принадлежали также писцы, на обязанности которых, кроме ведения разнородной отчетности, лежали подготовка и обучение будущих преемников.

Постоянные войны приводили к тому, что царства, возникающие в результате покорения отдельных княжеств, распадались. Накопленные веками культурные ценности гибли. На развалинах погибших царств затем возникали новые.

При всех этих переменах, неоднократно чередовавшихся на протяжении тысячелетий, земледельческая основа общества менялась крайне медленно. Основная производительная сила общества — рабы и крестьяне-невольники — не были заинтересованы в поднятии производительности труда. Поэтому культурный прогресс совершался здесь почти незаметно, наука и техника носили застойный характер.

Консерватизм культуры раннего рабовладельческого общества особенно закреплялся там, где власть жрецов слилась с государственной властью. Этот же консерватизм был причиной того, что, несмотря на широкое развитие торговли между отдельными народами, заселявшими громадную территорию, распространявшуюся от Нила до Янцзы-Цзян, культура каждого из них отличалась более резко от культуры других народов, чем на более поздних ступенях истории ([51], стр. 6; [52], стр. 24—31).

Математика раннерабовладельческого общества. Экономические и политические условия рабовладельческого общества определили и характер развивавшейся в нем математики. Здесь она была в первую очередь практической наукой, создаваемой для производства вычислений и измерений, для удовлетворения хозяйственных потребностей государства. Только этим и можно объяснить в основном эмпирический характер математики. Ее положения были в значительной части получены путем проб, на ощупь. Она и излагалась тогда преимущественно в виде конкретных задач, а не общих правил, и преподносилась догматически: задачи, которые мы назвали бы типовыми, нужно было запоминать; лишь редко давалось пояснение, представляющее своего рода зародышевое доказательство.

Но в еще большей степени догматический характер математики раннерабовладельческого общества определялся авторитарным складом мышления, присущим этому обществу с его единоличным властвованием, имеющим в своей основе экономику, названную Марксом и Энгельсом азиатским способом производства. В этом обществе, где воля деспота считалась законом, не было места для мышления, доискивающегося до причин и обоснования явлений, ни тем более для свободного обсуждения.

Однако благодаря тому, что в течение столетий особое сословие специально занималось счетом и измерением, не только практически применяя их в технических и экономических целях, но и обучая им начинающих, в математике стали постепенно развиваться признаки абстрактной науки. Вместо прежних именованных чисел предметом изучения становились числа отвлеченные, стали осознаваться общие правила действий. В дальнейшем наряду с установившимися арифметическими правилами зародились общие приемы решения задач определенного типа. Хотя и не употреблялись формулы, как это делается у нас, тем не менее в этих приемах содержались зачатки алгебраического метода. Аналогично из конкретных измерительных задач постепенно появлялись зачатки теоретической геометрии.

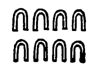
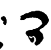
Исторические источники. Изучение истории математики раннерабовладельческой эпохи основано, в отличие от истории математики доклассового общества, на изучении памятников письменности. Однако застойный характер всей культуры этой эпохи ставит перед историками весьма трудные задачи. Нередко трудно или даже невозможно установить время, когда было сделано то или другое открытие, ибо раз установившийся прием передавался по традиции неизменным в течение столетий, а иногда и тысячелетий; документы чаще всего не датированы, и о времени их происхождения приходится судить лишь по косвенным данным. Знания, открытые в замкнутых общинах, вне их пределов могли оставаться неизвестными и быть утерянными навсегда во время опустошительных войн.

Неоднородность и неполнота наших знаний о математике отдельных культурных народов этой эпохи зависит в значительной степени от качества и количества сохранившихся письменных памятников. В Месопотамии записи делались на глиняных табличках, которые потом обжигали, благодаря чему они пережили тысячелетия. В Египте для записей служил папирус, хотя и не столь прочный, но все же сравнительно хорошо сохранившийся в сухом климате. Но в Индии и Китае писали на коре и бамбуке (бумага была изобретена китайцами лишь во II в. н. э.) — на материалах, которые быстро разрушались. Это привело к тому, что главные наши знания относятся к египетской математике и, в особенности, к математике Междуречья, между тем как древняя математика Китая и Индии изучена значительно меньше. О математике раннерабовладельческого периода народов Передней Азии, равно как и американских народов майя, инков и ацтеков, наши сведения еще весьма неполны.

Египетская математика. Построенные в период Древнего царства (около 3600—2700 лет до н. э.) колоссальные царские гробницы — пирамиды — не только наглядные свидетели деспотической власти фараонов. Они укрепляют нас в мысли, что уже тогда математические знания египтян должны были находиться на сравнительно высоком уровне. Сооружение таких пирамид требовало большого мастерства в производстве арифметических вычислений с большими числами и простейших геометрических измерений. Эти же знания нужны были и руководителям строившихся царской властью каналов, дамб и водохранилищ, учетчикам царских и храмовых поместий. Летописи сообщают о периодически проводившемся по всей стране, начиная с первых династий, подсчете земли, скота, людей и золота, на основании которого устанавливались подати, взимаемые в казну царя. Наконец, без математических знаний не могла обойтись астрономия: «Необходимость вычислять периоды разлития Нила создала египетскую астрономию, а вместе с тем господство касты жрецов как руководителей земледелия», — писал Маркс ([1], стр. 517). Потребность календаря, которым египтяне пользовались еще в IV тысячелетии до н. э., также оказала серьезное влияние на развитие египетской математики.

В период Древнего царства математические знания египтян стояли на значительной высоте. Сохранилось имя легендарного архитектора и математика Имхотепа, первое имя в истории математики. Однако от этой эпохи остались лишь надписи, не содержащие никаких математических данных, кроме записи чисел и мер. Это дает лишь возможность установить форму числовых знаков и систему нумерации египтян, а также сведения об употреблявшихся единицах измерения.

Система счисления египтян. У древних египтян существовала десятичная система нумерации, причем отдельные числовые знаки имелись, начиная с 1, для степеней 10 вплоть до 10^7. Единица писалась как  (образ мерной палки), десять  (иероглиф, обозначавший «путы» для стреножения коров, или «вал»), сто  («мерительная веревка», служившая для обмера полей и делившаяся на сто локтей), тысяча  («цветок лотоса»), десять тысяч  («указательный палец»), сто тысяч  («головастик»), миллион  («удивленный человек»), десять миллионов  («Солнце»). Повторяя эти знаки и ставя их один возле другого, египтяне выражали так все остальные числа. Все свои иероглифические надписи они писали справа налево, и в том же направлении записывали и числа, начиная с низших разрядов. При этом одинаковые знаки объединялись в группы, содержащие не больше чем четыре знака. Таким образом, например, число 15 377 записывалось так:

При дальнейшем развитии египетской культуры иероглифическое письмо, возникшее из рисунка еще в древнейшую эпоху, сменилось гиератическим (скорописными сокращениями иероглифов), а затем демотическим (алфавитом). Соответственно менялись и числовые знаки. С переходом к гиератическому письму египтяне стали писать цифры, начиная с высших разрядов и кончая низшими, в том же направлении, как и прочие понятия. Заслуживает внимания, что в гиератическом и демотическом письме, наряду со знаками для количественных числительных, существовали особые знаки для порядковых числительных от 1 до 30, применявшиеся для указания чисел месяца. Прогресс в обозначении чисел виден на таких примерах: 3 писалось иероглифами , гиератически , демотически ; 80 — соответственно , , .

Таким образом, мы видим, что, несмотря на застойный характер египетской математики, на протяжении тысячелетий она все же претерпела некоторые изменения.

Обмеры пирамид показали, что основные их размеры выражаются в целых числах «локтей»,— строя свои сооружения из целых блоков, египтяне для измерения длин не нуждались в дробях, которые были, однако, необходимы в землемерии.

Математика в египетских школах писцов. Значительно более полные сведения мы имеем о математике периода Среднего царства (2000—1710 гг. до н. э.), ознаменовавшегося усилением централизованного государства и расцветом культуры страны. До нас дошли не только различные хозяйственные записи, отчетности и т. п., содержащие математические расчеты, но и небольшое число специально математических документов, представлявших собой своего рода учебные пособия для египетских школ писцов. Значение этих школ для привилегированного сословия писцов видно из «Поучения Дуау» ([53], стр. 25), в котором отец наставляет поступающего в такую школу сына «обратить свое сердце к книгам» и предупреждает его о невзгодах, ожидающих всякого, кто не сумел стать писцом.

Из математических папирусов наиболее важными являются два: Лондонский, писца Ахмеса (папирус Райнда, названный так по первому владельцу), содержащий 85 задач, относящийся примерно к 2000 г. до н. э. [54, 55], и Московский, содержащий 25 задач, причем его считают на два столетия древнее. Московский папирус, хранящийся в Государственном музее изобразительных искусств, был расшифрован академиками Б. А. Тураевым и В. В. Струве и издан последним в 1930 г. [56].

Арифметические действия (см. [57, 58]). Из математических папирусов мы прежде всего узнаем, как египтяне выполняли четыре арифметических действия над числами (положительными целыми). Сложение и вычитание (всегда меньшего числа из большего) не представляло для них трудностей. Оно облегчалось их десятичной системой нумерации и проводилось, собственно, тем же способом, который применяем и мы: например, при сложении складывались единицы одинаковых разрядов (т. е. изображенные одинаковыми знаками), а в тех случаях, когда число таких единиц достигало 10, единица прибавлялась к следующему высшему разряду. Выполнение этих действий облегчалось применением камешков. Обозначалось сложение и вычитание иероглифами  и , первоначально изображавшими «хождение» в одну или другую сторону.

Иначе обстояло дело с умножением. Сохраняя навыки, имевшие свои корни в далеком прошлом, когда у египтян еще существовала двоичная система счисления, они сводили умножение к двум действиям: удвоению и сложению. Если, например, нужно было умножить 15 на 13, они составляли табличку:

/1	15
2	30
/4	60
/8	120
вместе	195

В этой табличке каждая последующая строчка получалась из предыдущей удвоением (сложением числа предыдущей строчки с самим собой). Последнее число левого столбца не должно было превышать множитель (13). Затем в левом столбце они подбирали те числа, которые в сумме дают 13 и отмечали их наклонной черточкой, причем сначала помечалось последнее число столбца и от него двигались вверх. Разумеется, египтяне не доказывали, что разбиение любого числа на сумму степеней числа 2 всегда осуществимо, причем единственным способом, — подобный вопрос у них не мог даже возникнуть. Подбор слагаемых в левом столбце было легко осуществить, двигаясь снизу вверх и отбрасывая те числа, прибавление которых к сумме предыдущих давало число, превышающее заданный множитель (13). После разметки складывались числа правого столбца, находящиеся в помеченных строках, и сумма записывалась внизу.

По этой же схеме производилось и деление, например, 195 на 13. В этом случае удваивали 13 до тех пор, пока в правом столбце числа помеченных строк в сумме не давали 195, и тогда ответ получался в виде суммы помеченных чисел левого столбца, т. е. в данном примере чисел 1, 4, 8. Однако в общем случае (деление с остатком) здесь приходилось прибегать к дробям. Отметим, что удвоение и деление пополам как особые арифметические действия сохранялись в западноевропейских учебниках еще в XVIII в.

Египетские дроби (см. [59, 60]). Способ понимания и выражения дробей в египетской математике своеобразен. Как уже сказано, дроби возникли из процесса измерения — деления площади поля на части. Поэтому дробь представлялась как часть единицы, причем первоначально как часть конкретной единицы площади — «сетата», и так и обозначалась. Наиболее древними были двоичные дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ «сетата», для которых имелись особые знаки. Позднее к ним присоединились дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Еще позднее стали рассматриваться вообще аликвотные дроби $\left(\text{т. е. дроби вида } \frac{1}{n}\right)$, обозначавшиеся иероглифом «ра» , первоначально имевшим значение $\frac{1}{32}$ — «геката», основной меры емкости (около 4,5 *л*), под которым ставился знак, выражающий знаменатель; так, например, $\frac{1}{10}$ писалась так: . С переходом к гиератическому письму вместо иероглифа «ра» стали писать просто точку, так что $\frac{1}{10}$ записывалась как .

На дальнейшее развитие счета с дробями оказали влияние потребности календаря. Египтяне делили год на 12 месяцев по 30 дней и прибавляли по их истечении пять добавочных дней. Числа месяца отсчитывались как его доли, а этот счет переносился затем и на другие случаи. Так, 1-е число считалось $\frac{1}{30}$ месяца, 3-е — $\frac{1}{10}$, 20-е — $\frac{2}{3}$; следовательно, 24-е, т. е. $\frac{4}{5}$ месяца, представлялось как сумма $\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$ месяца, а затем и вообще $\frac{4}{5}$ как $\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$.

Располагая, таким образом, аликвотными дробями и дробью $\frac{2}{3}$, египтяне производили деление целых чисел, пользуясь приведенной выше схемой деления пополам. Но для этого им нужно было еще уметь представить дробь вида $\frac{2}{n}$ как сумму аликвотных дробей. Если n было четным числом, то $\frac{2}{n}$ просто замещалось сокращенной дробью. Для нечетных n были составлены особые таблицы. Такая таблица имеется в Лондонском папирусе для всех нечетных n, начиная с $n = 3$ и кончая $n = 101$.

Так, например, $\frac{2}{3}$ разлагалось как $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, а $\frac{2}{101}$ как $\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$. Все таблицы, или части таблиц, встречающиеся в Московском папирусе и в различных других папирусах, приводят те же разбиения, откуда видно, что только они и применялись. Однако разбиение дроби $\frac{2}{n}$ на аликвотные дроби можно осуществить множеством способов, отличных от «стандартного» способа, приведенного в таблицах. Вопрос о том, почему египтяне избрали именно данное разбиение и каким путем они составили свои таблицы, нельзя пока считать окончательно решенным.

Как с помощью таблицы разбиений дробей $\frac{2}{n}$ на аликвотные дроби производилось деление,— лучше всего покажет пример. Для деления, скажем, 28 на 5, египтяне начали составлять по-прежнему таблицу:

$$\begin{array}{rr} /1 & 5 \\ 2 & 10 \\ /4 & 20, \end{array}$$

из которой нашли, что $5 + 20 = 25$ еще не равно делимому 28 (не хватало 3), следовательно, и в левом столбце $1 + 4 = 5$ не дает еще полного частного. Тогда они продолжали строить таблицу, однако, вместо того чтобы дальше удваивать числа правого столбца (что было бы бесполезно), они образовали в левом столбце сначала $\frac{1}{5}$, а затем удвоением $\frac{2}{5}$, для которых в таблице разбиений дробей $\frac{2}{n}$ находим выражение в аликвотных дробях $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, т. е. они продолжали таблицу так:

$$\begin{array}{rl} /\frac{1}{5} & 1 \\ /\frac{2}{5} & 2. \end{array}$$

Складывая все помеченные числа левого столбца (причем вместо $\frac{2}{5}$ писалось $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$), получали частное $5+\frac{1}{5}+$ $+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

Отметим еще одну особенность — употребление вспомогательных красных чисел. Если, например, нужно было взять $1\frac{2}{3}$ от $\frac{1}{5}$, то египтяне писали:

$1\frac{2}{3}$ (черной тушью),

3 2 (вспомогательные числа, написанные красной тушью),

что означало, что 1 содержит три третьих, а $\frac{2}{3}$ содержат две третьих, следовательно, $1\frac{2}{3}$ содержит пять третьих, которые и следует взять от $\frac{1}{5}$, что дает $\frac{1}{3}$.

Арифметические задачи. Задачи, которые содержатся в Лондонском папирусе, сгруппированы в трех «книгах». В первой содержатся арифметические задачи, во второй имеются задачи на определение площадей и объемов, а в третьей собраны различные задачи прикладного хозяйственного характера.

В Московском математическом папирусе задачи не приведены в систему. Частично они сходны с задачами Лондонского папируса, но среди них выделяются три задачи, отличные от названных. Это задача на вычисление части судна, которая, однако, полностью не расшифрована, так как текст попорчен, затем на вычисление объема усеченной пирамиды, и наконец, на нахождение площади либо полушара, либо полуцилиндра (какой именно поверхности, окончательно не установлено).

Познакомимся сначала с арифметическими задачами, названными «исчислением кучи», причем остановимся на одном конкретном примере. Если мы запишем его современным способом, то получим линейное уравнение с одним неизвестным:

$$x+\frac{1}{7}x=19.$$

У египтян, конечно, не было понятия «уравнения» в нашем смысле, но они тем не менее искали неизвестное отвлеченное число — «кучу», выражая задачу словами. Решали они ее двумя способами: либо прямым делением 19 на $1+\frac{1}{7}$, либо приемом, который получил впоследствии название «regula falsi» (правило ложного положения). Он состоял в следующем. Пусть требуется (в современном написании) решить уравнение

$$\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+\ \ldots\ +\frac{p_n}{q_n}\right)x=r.$$

Сначала в качестве решения принимают величину

$$x_1=q_1\cdot q_2\cdot\ \ldots\ \cdot q_n.$$

Подставляя вместо x это значение, в общем случае получают, конечно, не r, а r_1. Чтобы получить правильный результат, придется умножить первоначальное «ложное положение» x_1 на отношение $\frac{r}{r_1}$, т. е. $x=x_1\frac{r}{r_1}$.

В данном примере (задача 24 Лондонского папируса) египетский математик принял за первоначальное «ложное» решение число 7, как наиболее подходящее для умножения на $1+\frac{1}{7}$.

Среди арифметических задач мы встречаем и задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии (выражаясь современным языком). В задачах первого вида требуется распределить данное количество, например, мер зерна, или буханок хлеба, между данным количеством лиц так, «чтобы разница между каждым человеком и его соседом» составляла данную величину.

Последняя задача формулировалась, как задача-шутка «Опись домашнего хозяйства»: «7 домов, 7 кошек, 7 мышей, 7 колосьев ячменя, 7 мер зерна; сколько всего ?», т. е. в каждом доме имеется 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь — 7 колосьев, каждый колос, будучи посеян, дал бы 7 мер зерна; требуется найти сумму $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$.

Геометрические задачи. Одной из наиболее замечательных египетских задач является задача 14 Московского папируса на вычисление объема усеченной пирамиды. Вместе с решением она гласит:

«Форма вычисления пирамиды, не имеющей вершины; если тебе назовут пирамиду без вершины в 6 [локтей] в высоту,

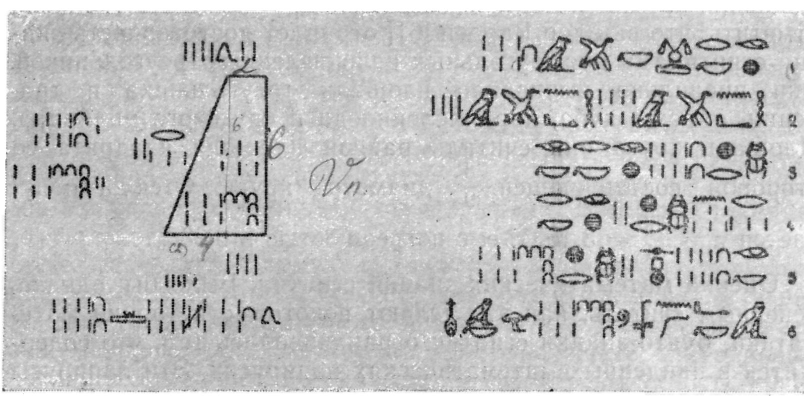


Рис. 2. Иероглифическая транскрипция двух столбцов Московского папируса, выполненная И. И. Перепелкиным. Иероглифический текст читается справа налево. Длина верхней стороны 2 с ее квадратом 4 записана над чертежом, нижняя длина 4 — под чертежом, высота 6 и объем 56 — внутри чертежа, а умножение 28 на 2 — слева от чертежа.

4 [локтя] по нижней стороне и в 2 по верхней стороне; вычисляй с этой 4, возводя в квадрат, получается 16; удвой 4, получается 8; вычисляй с этой 2, возводя в квадрат, получается 4 [1]; сложи вместе эти 16 [2] с этими 8 и с этими 4

[3], получается 28; вычисли [4] $\frac{1}{3}$ от 6, получается 2; вычисли [5] 28 два раза, получается 56 [6]; смотри: она будет 56. Ты нашел правильно». (В оригинале нет, конечно, знаков препинания, усеченная пирамида изображена в виде небольшой трапеции, а действие «возводить в квадрат» дано иероглифом «проходить мимо», как принято в египетской математике; происхождение этого обозначения не выяснено.)

Вместе с текстом в папирусе дан чертеж и вычислительная схема, которые мы здесь воспроизводим. Таким образом, вычисление производится тем же способом, которому следуем мы, применяя формулу $v=\frac{1}{3}h\,(a^2+ab+b^2)$.

Египтяне, возможно, знали, что треугольник со сторонами 3, 4, 5 — прямоугольный. В таком случае веревкой, разделенной узлами на $12=3+4+5$ частей, они могли пользоваться для построения прямого угла. Другой прямоугольный треугольник с целыми сторонами 20, 21, 29 мог дать им возможность получить не только прямой угол, но сразу же и прямоугольник, на глаз не отличимый от квадрата. Следует, однако, отметить, что ван дер Варден [61] отрицает достоверность знаний египтянами прямоугольных целочисленных треугольников. Они правильно вычисляли площади треугольника и трапеции, объемы куба, параллелепипеда и кругового цилиндра. Площадь круга они считали равной площади квадрата со стороной, составляющей $\frac{8}{9}$ диаметра круга. Отсюда получается $\pi=\frac{256}{81}=3{,}16$, т. е. с погрешностью в 0,63%.

Оценка математических знаний египтян. Было бы, однако, неверным считать, как это делают некоторые историки математики, будто знания египтян ограничивались тем, что содержится в найденных математических папирусах. Эти папирусы представляют собой элементарные школьные пособия. Но поскольку обучение сводилось к заучиванию на память, естественно, что в них излагались лишь готовые предписания, а не способы, которыми эти предписания были открыты. Бесспорно, что хотя многие правила египтяне открыли эмпирическим путем, к некоторым они пришли отвлеченным рассуждением. Ясно также, что в их математике уже давал себя знать и теоретический интерес. Ведь получить правильный способ вычисления объема усеченной пирамиды нельзя было эмпирически, для этого требовались теоретические соображения. Далее, задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии, конечно, не встречались в таком виде на практике, а были придуманы для упражнений. Наконец, хотя у древних египтян и не было алгебраических формул, у них имелось несколько видов общих приемов для решения однотипных задач. Эти приемы с полным правом можно рассматривать как зачатки алгебраического метода.

В период Нового царства, полного восстаний и войн, египетская математика не могла значительно подвинуться вперед. Но вполне возможно, что тогда изменилось направление ее развития, и следует искать ее достижения в астрономических сочинениях того времени, содержавших зачатки тригонометрических таблиц. Так или иначе, взятая в целом, на протяжении всего своего многотысячелетнего развития математика египтян, так же как и вся египетская культура, оказала сильное влияние на науку стран, с которыми Древний Египет находился в общении, в особенности на греческую математику. Сходство отдельных методов и даже задач в египетской и вавилонской математике делает весьма вероятным предположение об имевшем место научном общении; однако недостаток исторических материалов и слабая их изученность не позволяют пока с полной уверенностью утверждать это.

Математика в древней Месопотамии. Общественные условия. В IV тысячелетии до н. э. в обширной низменности между Тигром и Евфратом возникли раннерабовладельческие государства: Шумер — на юге и Аккад — на севере. Земледелие, основанное главным образом на искусственном орошении и применявшее плуг-сеялку, крупные города с их построенными из больших кирпичей ступенчатыми храмами, техника, знавшая водочерпательное колесо и скользящую по веревке систему ведер, приводимую в движение животными, процветание ремесел и торговли, — все это обусловило собой зарождение науки, в том числе и математики. Сохранившиеся с шумерийско-аккадской эпохи многочисленные клинописные хозяйственные записи о сдаче хлеба и скота, отчетности крупных хозяйств при дворцах и храмах дают ясную картину о существовавшей тогда системе счисления, которая была унаследована завоевателями Месопотамии — вавилонянами.

Большинство найденных в раскопках клинописных табличек, содержащих специально математические тексты, относится к эпохе древневавилонского царства, в особенности ко времени царствования династии Хаммурапи и касситов, т. е. примерно с 1800 г. до 1600 г. до н. э. После длительного перерыва, вызванного непрекращающейся сменой завоеваний и восстаний покоренных народов, до нас дошли свидетельства о математических знаниях вавилонян, относящиеся ко времени, примерно, от 300 г. до н. э. до начала н. э. В подавляющем большинстве это не чисто математические, а астрономические клинописные таблички, включающие, однако, и математическое содержание. В это время, когда Вавилон уже не был политическим центром, но остался культурным очагом громадной империи, в которой с древним местным населением смешались персы, евреи, греки и индийцы, математика стала служить меньше строительному делу, а больше астрономии. Она решала усложнившиеся задачи и оперировала с громадными по тому времени, «астрономическими», числами, включала измерение углов и первые зачатки тригонометрии.

Шумерийско-вавилонские школы писцов. Источники. Подобно египтянам, у шумерийцев и вавилонян тоже существовало особое сословие писцов. Как и ремесла, профессия писца переходила от отца к сыну, а подготовка велась в школе писцов в «доме таблички». Здесь обучали чтению, письму и счету; преподавание сводилось к заучиванию на память, оно, как и вся жизнь раннерабовладельческого общества, носило крайне догматический характер.

Из шумерийской эпохи, за 2000 лет до н. э., сохранилось бывшее тогда очень популярным сочинение (найдены 21 табличка и фрагменты; оно названо в тогдашнем каталоге шумерийской литературы), описывающее жизнь учащегося в «доме таблички» [62]. Из этого документа мы узнаем, что главным занятием в школе было вычисление, счет и учет, далее, что ученик переписывал на таблички образцы для упражнения, которые затем выбрасывались, что он, получив урок, должен был «решить квадраты» (по-видимому, решать задачи, в которых неизвестные встречались в квадратах — по-нашему, квадратные уравнения) и, наконец, что в школе занимались и черчением.

Первые открытые в середине прошлого века клинописные таблички, содержащие математический материал, дали возможность установить лишь главные черты математики древних народов Месопотамии.

В первое время западноевропейские ученые совершенно превратно толковали эти тексты как якобы религиозные, содержащие «магические числа». Однако на деле преобладающее большинство этих текстов — сотни тысяч табличек — имели непосредственное отношение к хозяйственной деятельности древних народов Месопотамии. Была открыта библиотека ассирийского царя Ашшурбанипала (VII в. до н. э.), содержащая среди 20 тысяч различных табличек и математические, относящиеся к III—II тысячелетию до н. э. Начиная с 1916 г., французский ассириолог Ф. Тюро-Данжен [63], а с 1929 г. немецкий историк математики О. Нейгебауэр [64, 65] расшифровали и опубликовали большое количество клинописных математических текстов, дающих более правильное представление о математике шумерийцев, аккадян и вавилонян и вместе с тем более полное, чем то, которое можно создать себе о математике древних египтян. Если мы примем

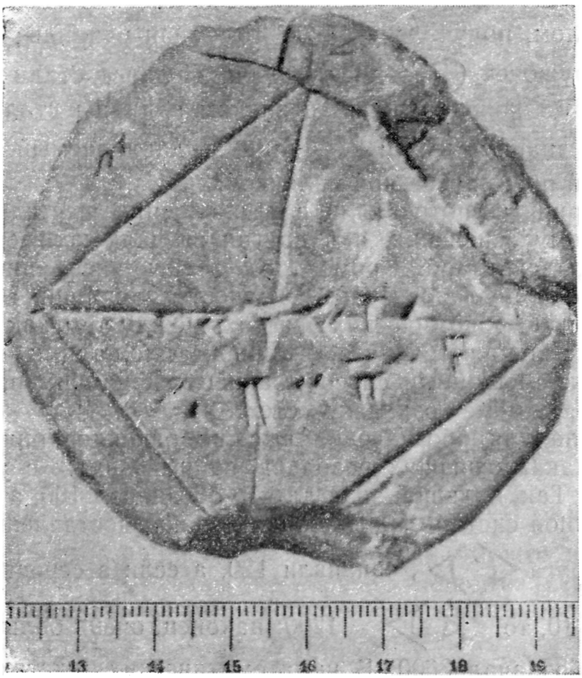


Рис. 3. Клинописный текст из вавилонской коллекции Иэльского университета. Изображен квадрат с его диагоналями. Сторона равна 30 (число надписано над левой верхней стороной). На диагонали написано число, выражающее отношение диагонали к стороне 1, 24, 51, 10; под диагональю стоит ее длина 42, 25, 36.

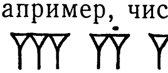
во внимание, что из имеющихся в музеях разных стран около полумиллиона табличек (составляющих лишь часть того, что погребено в развалинах) расшифровано только свыше 300, содержащих математические тексты, то убедимся, как далеки мы еще от полного представления о математическом мышлении древних народов Месопотамии.

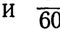
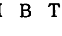
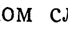
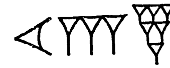
Система счисления. Система счисления шумерийцев, способ нумерации и запись чисел развивались вместе со всей их культурой, одновременно с развитием всей их письменности. Они писали заостренной тростниковой палочкой, вдавливая ее в глиняную табличку. Первоначально цифры изображались вдавливанием круглого конца: когда палочка ставилась под косым углом, получался эллипс — знак единицы; под прямым — кружочек — знак десяти. Позднее стали употреблять острый конец палочки и знаком единицы стал простой клин, знаком десяти, клин, выдавливаемый косо наклоненной призматической палочкой.

Шумерийцы употребляли в вычислениях шестидесятеричную систему счисления, а в других случаях пользовались и десятичной системой. Кроме того, запись чисел цифровыми знаками они последовательно осуществляли лишь в математических и астрономических текстах, между тем как в датах, указаниях количества веса, величины площади и т. п. они применяли смешанный способ, записывая, например, 225 как «2 ме 25», где «ме» означало «сто».

Вначале для обозначения высших разрядов они пользовались знаками низших разрядов, записываемых в увеличенном виде. Так, большой знак для 10 обозначал 100, а в шестидесятеричной системе 60; два таких знака, поставленные друг против друга, означали 120, а если в середине стоял еще знак 10, то = 1200; наконец, очень большой знак для 10 обозначал 3600. В нематематических текстах, применяя десятичную систему, 100 записывали знаком, 1000 как, 10 000 знаком. Однако постепенно, с дальнейшим упрощением и установлением однотипности письма, разница между крупными и мелкими знаками утерялась и в конце концов остались лишь два знака, и. Таким образом, тот факт, что различные разряды перестали записывать различными символами, привел к возникновению позиционной системы, сыгравшей величайшую роль в развитии человеческой культуры.

При помощи повторений знаков и производилась запись всех чисел; так, 21 записывалось как, т. е. применялось сложение и умножение. Впрочем, иногда употребляли и вычитание и вместо 19 писали 20—1  ; здесь  читалось как «лал» и соответствовало нашему «без». Позднее вавилоняне, подобно египтянам, стали группировать знаки, но не по четыре, а по три, записывая 19 как  ; еще позже, в эпоху Селевкидов, этот же знак сократился до  . Направление письма шло первоначально сверху вниз, а позже слева направо, сначала ставились высшие разряды, а затем низшие.

Так обозначались все числа до 59 =  включительно. Однако число 60 обозначалось тем же знаком, что и 1 =  , а не шестикратным повторением знака  = 10. Чтобы написать, например, 65, приписывали к знаку 60 справа знак 5, и для того чтобы не читать все это как $1 + 5 = 6$, оставляли между этими знаками промежуток:  . Аналогично, число $120 = 2 \times 60$ писалось тем же знаком, что и 2, число 180 — как 3 и т. д., таким же образом записывались и числа, превышающие $60^2 = 3600$, например, число $10\,921 = 3 \times 60^2 + 2 \times 60 + 1$ писалось так:  .

Очевидно, этот способ записи не был однозначным, так как приведенная только что клинописная запись могла обозначать и число в 60 раз большее, т. е. 65 5260 и вообще $60^n \times 10\,921$. Более того, этим же способом записывались и дроби, хотя для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ имелись еще и специальные знаки:  ,  и  . Следовательно, знак  мог обозначать и $\frac{1}{60}$, и в таком случае запись читалась бы как $3 \times 60 + \frac{1}{60} = 182\frac{1}{60}$, но знак  мог обозначать и $\frac{1}{60^2}$, а вся запись $(3 \times 60^2 + 2 \times 60 + 1) : 60$. Действительное значение числа определялось по смыслу задачи. Таким образом, эта система не давала абсолютного значения чисел, ее нельзя считать строго позиционной. Кроме того, так как в ней не было знака для отсутствующих разрядов, число  можно было прочитать не только как $13 \times 60 + 6 = 786$, но и как $13 \times 60^2 + 6 = 46\,806$, или же как $13 + \frac{6}{60}$ и т. п. Однако этот недостаток не отражался на записи чисел от 1 до 59, а для чисел до 3600 знак пустого разряда нужен был лишь 59 раз.

С дальнейшим развитием математических знаний в более поздних текстах пустующие разряды стали обозначать знаком  — это был тот же знак, который, подобно нашей точке, ставился между предложениями. Таким образом, число $13 \times 60^2 + 6$ писалось, в отличие от $13 \times 60 + 6$, так: . Знак , встречающийся в текстах лишь более новых, чем 1500 г. до н. э., не ставился в конце чисел и позже. Несмотря на свой лишь полупозиционный характер, шестидесятеричная система шумерийцев и вавилонян была очень выгодна для вычислений, в частности, деление производилось в ней как и в нашей десятичной системе. Не нужно было никаких специальных правил для действий с дробями. Как и с десятичными дробями, все действия над шестидесятеричными дробями производились так же, как над целыми числами, однако в полученном результате нужно было указать разряд.

Шестидесятеричная система счисления вавилонян применялась, как мы увидим, астрономами эллинистических стран и позже, а отсюда она перешла к нам и применяется для измерения углов и времени.

О причине возникновения вавилонской системы счисления издавна высказывались различные предположения. Одни полагали, что число 60 было избрано за основание системы счисления потому, что оно имеет больше различных делителей, чем другие небольшие числа. Другие утверждали, что эта система имеет астрономическое происхождение: вавилоняне будто бы ввели для удобства счета своего 360-дневного года шестидесятеричную систему счисления, которая служила им и для удобного деления круга. Однако от этого предположения пришлось отказаться даже самому выдвинувшему его М. Кантору ([21], т. I), когда выяснилось, что шумерийцы знали лишь солнечный год в 365 дней и лунный год в 354 или 355 дней. Далее была выдвинута гипотеза, согласно которой шестидесятеричная система возникла слиянием двух систем: шестиричной и десятичной, из которых одна будто бы имелась у шумерийцев, другая — у аккадян. Но эта гипотеза не была подтверждена историческими фактами.

Нейгебауэр [66] предложил видоизменение этой гипотезы, исходя из системы весов, которая имелась у вавилонян, а именно: 1 талант = 60 минам, 1 мина = 60 шекелям. Эта весовая система (а вместе с тем и денежная система, так как вес серебра служил денежной единицей) по гипотезе Нейгебауэра возникла из объединения двух десятичных весовых систем (шумерийцев и покоривших их аккадян), имевших каждая свою основную единицу веса: одна — мину, другая — шекель. С возникновением единого государства между обеими единицами установилось соотношение 60 : 1, примерно соответствовавшее их весам, а затем эта система мер веса распространилась на счет вообще.

Но и эту гипотезу нельзя считать вполне достоверной. И. Ю. Тимченко (см. [11]) и И. Н. Веселовский [67] считали, что происхождение числа 60 как основы системы счисления надо искать в счете на пальцах. Что касается позиционности, то Веселовский объясняет ее происхождение техникой вычислений. Но и это предположение относится лишь к догадкам.

Недавно X. Леви [68] выдвинуто новое предположение. Изучение вновь открытых шумерийских хозяйственных текстов показало, что у них имелась шестидесятеричная система нумерации, между тем как система мер, длин, площадей и емкости у них была десятичная, а меры весов вовсе отсутствовали: обмен происходил не на вес, а на емкость. Меры емкости и площади — древнейшие; первыми измерялось продовольствие, вторыми — поля; они служили для определения количества зерна, нужного для посева, и урожая, собираемого с площади. Каждая мера площади считалась основанием прямоугольного параллелепипеда с высотой в один локоть; эта мера емкости имела то же название, что и лежащая в ее основании мера площади.

С самого начала возникновения земледелия прямоугольные поля измерялись шагами, а поля неправильной формы — длиной их периметра. Позднее стали описывать вокруг поля прямоугольник, измеряли его длину и ширину, множили их, а затем вычитали отсюда площадь лишних полос. Последнюю не измеряли прямо, а вычисляли из количества зерна, ушедшего на ее засев, что облегчалось существованием плугасеялки, в течение тысячелетий установленными нормами количества зерна на единицу длины борозды и расстояния борозд. В основе десятичной системы мер емкости первоначально лежал один ку (примерно 871 *г*), суточный паек ячменя взрослого мужчины-раба; другие меры находились к нему в отношениях 1 : 10 : 100.

Однако потом в основу системы мер емкости был положен месячный паек, а так как месяц считался равным 30 дням, то он был равен 30 ку = 1 симду. Оба ряда мер затем слились в один ку, 10 ку, 30 ку, 100 ку, 3000 ку. В этом ряду уже, кроме 10, имелась вторая единица — 30, не являющаяся степенью 10. Позже, при царях Аккадии, вторая единица, 30, была заменена другой — 60. Эта замена была вызвана переходом питания с жареного зерна на молотое, пищу более утонченную, однако, менее питательную; поэтому теперь рабы-мужчины получали месячный паек 60 ку, норму, которая прежде давалась лишь ремесленникам и социально выше стоящим членам раннерабовладельческого общества. Соответственно вдвое увеличилась и норма засева. Таким образом, теперь получился ряд мер 1, 10, 60, 600, 6000, в котором, кроме замены 30 на 60, выпала мера 100.

Наконец, вторую единицу, 60, стали считать «большой единицей», и ряд превратился в вавилонскую шестидесятерично-десятичную систему нумерации 1, 10, 60, 600, 3600, с двумя единицами — 10 и 60. Языковедческие исследования показывают, что переход от десятичной к шестидесятеричной системе завершился еще до шумерийской эпохи.

Арифметические действия (см. [57], [69], [70]). В отличие от египтян, которые, как мы видели, в своих школьных руководствах помещали вычислительные схемы, вавилоняне указывали лишь результаты вычислений. Так, например, они писали: «1 10 и 26 40 сложено и 1 36 40 получается», что в нашем обозначении следует читать как: «$1 \times 60^2 + 10 \times 60 + 26 \times 60 + 40 = 1 \times 60^2 + 36 \times 60 + 40$». Так же как сложение, производилось и вычитание.

В отличие от египтян, сводивших умножение к удвоению, вавилоняне производили его прямо, действуя так же как и мы, поразрядно. Но так как им потребовалось бы запомнить таблицу умножения от 2×2 до 59×59, состоящую из 1711 произведений, то они пользовались готовыми таблицами умножения. Каждая из таких таблиц содержала произведения одного «заглавного» числа на все множители от 1 до 20, а также на 30, 40 и 50. При этом таблицы не были составлены для всех заглавных чисел от 1 до 59, а только для чисел, не имеющих других делителей, кроме 2, 3, 5, с единственным исключением: число 7 было также заглавным, благодаря чему заглавными оказались все числа первого десятка. Кроме таблиц умножения, вавилоняне широко пользовались таблицами обратных значений. Приведем первые и последние две строки такой таблицы, заменив клинописные знаки нашими:

2		30		
3		20		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	20	45		
1	21	44	26	40

Это значит:

$$\frac{1}{2}=\frac{30}{60}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{80}=\frac{45}{60^2}$$
$$\frac{1}{81}=\frac{160000}{60^4}$$

Замечательно, что для обратного значения 7 в таблице давалось приближенное значение 8 34 17 8 34 17, т. е. периодическая шестидесятеричная дробь $\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{17}{60^3}+\frac{8}{60^4}+$ $+\frac{34}{60^5}+\frac{17}{60^6}$, которая обрывалась не где попало, а лишь после двукратного повторения периода. Наряду с этим найдена таблица, содержащая приближенные выражения обратных значений чисел 7, 11, 13, 14 и 17 при помощи конечной шестидесятеричной дроби; в таблице, например, указано, что 8 34 16 59 меньше, а 8 34 18 больше, чем обратное значение числа 7. С другой стороны, в ряде таблиц обратных значений просто отмечалось, что число 7 не имеет обратного значения (т. е. не выражается конечной шестидесятеричной дробью). Очевидно, что эти таблицы принадлежат различным историческим уровням развития вавилонской математики, которая под конец уже подошла к представлению бесконечного периодического арифметического процесса.

С помощью таблиц обратных значений производилось деление чисел: в таблице отыскивалось значение, обратное делителю, а затем на него множили делимое. В том случае, когда в таблице обратное значение не содержалось, результат вычисляли приблизительно. Позднее вавилоняне стали применять и способ поразрядного деления, подобный нашему.

Наряду с таблицами умножения и обратных значений, имелись таблицы квадратов и квадратных корней, кубов и кубических корней, сумм квадратов и кубов, степеней данного числа и даже таблицы для определения показателя.

Арифметические задачи и их решение. Задачи, которые встречаются в клинописных математических текстах, относятся к различным периодам на протяжении примерно 1500 лет; они разнородны как по своему содержанию, так и по способу изложения, а также по уровню математического мышления. Некоторые таблички содержат сформулированную задачу и ее полное решение, другие же только условия задач. Иногда благодаря убористости клинописи и крайней сжатости изложения около 200 таких задач помещается на обеих сторонах таблички размером 8×4 *см*². Числовые данные в задачах, взятых из практики, или подражающих практическим задачам, подобраны так, чтобы облегчить вычисление при помощи таблиц. Задачи на отвлеченные числа, как правило, сгруппированы так, что начинаются с простых и восходят к более сложным, но относящимся все же к одному типу. Например, приведен целый ряд задач, в которых требуется определить два числа так, чтобы их произведение $x \cdot y = 600$, и чтобы они удовлетворяли второму условию, которое задается все более и более сложными выражениями, начиная с $x + y = 50$ и вплоть до

$$(3x+2y)^2+\frac{2}{13}\left\{4\left[\frac{1}{2}\left((x+y)-\left(\frac{1}{2}+1\right)(x-y)\right)\right]^2+\right.$$
$$\left.+(x+y)^2\right\}=17\,100,$$

причем все эти задачи имеют решение $x = 30$, $y = 20$. Отсюда видно, что составителю было неважно, что ученик знал результат, главное внимание уделялось усвоению метода решения.

Во всех задачах, так же как и у египтян, изложение велось лишь с конкретными числами, но, несомненно, составитель имел в виду общий случай. На этот обобщающий подход указывает и то, что умножение производилось и в случае, когда множитель был равен 1, и что там, где мы пишем $x + y$, вавилоняне писали, например, «$5 + 3$ — сумма ширины и длины».

Этому абстрактному, обобщающему способу мышления способствовал весь характер письменности вавилонян. Заимствовав клинопись у шумерийцев, пользуясь их языком в науке и хозяйственной деятельности в течение долгих веков, вавилоняне вместе с тем произносили шумерийские иероглифы по-своему, сохраняя, однако, их смысл. Благодаря этому, раз один и тот же символ мог иметь разные фонетические значения, шумерийское и вавилонское, было нетрудно свыкнуться с мыслью, что, например, «ширина» — это не только ширина, а вообще любая неизвестная отвлеченная величина. Таким образом, оставалось как будто немного, чтобы подняться до следующей ступени абстракции, до алгебры, однако лишь в совершенно других исторических условиях подобная возможность превратилась в действительность.

Среди арифметических задач имеется много задач на отдачу денег в рост (позднее, когда начисление в Древнем Риме, а затем в Венеции считали «со ста», стали говорить о «процентах»), который вавилонские ростовщики рассчитывали с 60-ти единиц, а именно в год 12 шекелей с 1 мины (т. е. с 60 шекелей). В задачах требуется по данной величине уплачиваемых в год «процентных» денег определить величину начального капитала, найти, во что вырастет данный капитал при начислении процентов и на проценты, определение количества лет, за которые данный начальный капитал вырос до данной суммы и т. п. Подобные задачи решались арифметически, шаг за шагом, строились и сопоставлялись арифметическая и геометрическая прогрессии.

К таким прогрессиям, так же как и у египтян, вели и задачи на раздел денежных сумм. Так, например, требовалось разделить $1\frac{2}{3}$ мины серебра между 10 братьями так, чтобы доли братьев образовали арифметическую прогрессию, причем известно, что доля 8-го брата равна 6 шекелям.

Задача решалась так: сначала определялась доля, приходящаяся на каждого брата в среднем, т. е. 10 шекелей, затем сумма долей 8-го и 3-го братьев (20 шекелей), далее превышение доли 3-го брата над долей 8-го (8 шекелей), и, наконец, искомое превышение, т. е. разность долей данной прогрессии. Решение было арифметическим, велось по продуманному плану, предполагало знание свойств арифметической прогрессии, но алгебраических формул в явном виде не применяло. Вместе с тем, в задачах на геометрическую прогрессию, а также на нахождение суммы квадратов чисел, предписание, по которому велось вычисление, со всей очевидностью указывает, что вавилонскому математику были известны общие правила суммирования арифметической и геометрической прогрессий и квадратов чисел.

Геометрические задачи. К задачам, которые вавилоняне также решали арифметическим путем, относятся и многие задачи на определение длин и площадей при делении земельных участков, или объемов земляных выемок, насыпей и построек и вычисление количества рабочих, необходимых для земельных или строительных работ. Это такие геометрические задачи, которые мы решаем при помощи уравнений первой степени (линейных) с одним неизвестным, или системы линейных уравнений со многими неизвестными. Но вавилоняне, даже тогда, когда число неизвестных доходило до 5, действовали лишь над данными известными величинами, а не над неизвестными величинами, как принято в алгебре. Однако этот второй, алгебраический метод применялся ими в задачах, также взятых из геометрии и приводящих, выражаясь нашим языком, к квадратным уравнениям, или к уравнениям более высоких степеней.

Так называемая «теорема Пифагора» была известна вавилонянам более чем за тысячу лет до Пифагора. Вавилоняне широко пользовались ею, и она служила источником задач на «квадратные уравнения». Например, вычисляли количество зерна, нужного для засева поля, имеющего форму равнобедренного треугольника с заданными сторонами; находили горизонтальное смещение нижнего конца вертикальной балки данной длины при заданном опускании ее верхнего конца; определяли длину хорды по стрелке стягиваемого ею сегмента и периметру окружности, принимая $\pi = 3$; отыскивали размеры геометрических фигур (например, прямоугольного треугольника, сечения осадной насыпи, деления треугольника на полосы, «каналы», параллельные основанию и др.). Но найдено и немало табличек с чисто геометрическими задачами, не облеченными в «прикладную» форму.

Сам факт, что вавилоняне знали «теорему Пифагора», свидетельствует о том, что они имели достаточно основательные геометрические познания. Они широко пользовались подобием геометрических фигур, а поэтому не исключено, что именно с помощью подобия они смогли ее вывести. Частные случаи могли быть найдены либо чисто арифметически при рассмотрении таблиц квадратов, либо наглядно геометрически. Например, из рассмотрения квадрата, образованного присоединением к данному квадрату четырех равнобедренных прямоугольных треугольников, на которые делят квадрат его диагонали — эта фигура издавна встречалась в орнаментах, например, при замощении полов плитками.

В качестве примера приводим табличку, содержащую чертеж квадрата, сторона которого помечена 30, а диагонали равны $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$, т. е. произведению 30 на $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$. Здесь последнее число равно $\sqrt{2}$ с погрешностью меньшей $\frac{22}{60^4}$, т. е. с пятью правильными десятичными знаками. В других случаях пользовались приближением $\sqrt{2} \approx 1+\frac{25}{60}$, верным до двух десятичных знаков. Большой интерес проявляли вавилоняне к «пифагорейским» треугольникам, т. е. к прямоугольным треугольникам с целочисленными сторонами. Найдена таблица, содержащая 15 таких треугольников $\left(\text{в ней даны } \frac{c^2}{a^2},\ b,\ c, \text{ где } a^2+b^2=c^2\right)$, причем в первом треугольнике отношение катетов равно $\frac{59}{60}+\frac{30}{60}$, т. е. близко к 1, а последний треугольник близок к треугольнику с углами 30 и 60°. Очевидно, что такие треугольники служили для практических целей; вместе с тем, их поиски свидетельствуют о значительной глубине понимания вавилонянами вопросов, которые мы относим к теории чисел.

«Уравнения» вавилонян. При решении «квадратных уравнений» (как называем мы подобные задачи) вавилоняне применяли способ решения отвлеченных задач, в которых неизвестные названы либо «длина», «ширина» и их произведение «площадью», либо «множимое» («игу») и его обратное значение «множитель» («игибу»). Приведем пример такой задачи и ее решения:

«Множимое и множитель 2 0 0 33 20. Умножь на [0] 30, 1 0 0 16 40. Умножь 1 0 0 16 40 на 1 0 0 16 40. 1 0 0 33 20 4 37 46 40. Вычти 1 отсюда. Остается [0 0 0] 33 20 4 37 46 40. Что на что нужно умножить, чтобы получилось [0 0 0] 33 20 4 37 46 40. Умножь [0 0] 44 43 20 на [0 0] 44 43 20. [0 0 0] 33 20 4 37 46 40. Прибавь [0 0 0] 44 43 20 к 1 0 0 16 40. 1 0 45 множимое. Вычти [0 0] 44 43 20 от 1 0 0 16 40 [0] 59 15 33 20 множитель».

Если мы выразим эту задачу и все подобные ей и их решение привычной нам алгебраической записью, то получим

$$x+\frac{1}{x}=a;\ x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1};\quad \frac{1}{x}=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}.$$

Другой тип задач принимает на современном языке вид $x+y=a$, $x \cdot y=b$; к этому «нормальному виду» приводятся все вавилонские задачи, в том числе и значительно более сложные, которые мы решаем с помощью квадратных уравнений. При этом решение получается с помощью вспомогательного неизвестного. Из того, что $x+y=a$, следует, что на сколько одно из этих неизвестных больше $\frac{a}{2}$, на столько другое меньше $\frac{a}{2}$. Положив поэтому $x=\frac{a}{2}+z$, $y=\frac{a}{2}-z$, получаем $\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right)=b$, откуда $z=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$.

Таким образом, хотя вавилоняне и не применяли алгебраической символики, они тем не менее решали задачи алгебраическим методом, ибо задачи они решали по плану, приводили их различными приемами к единому типу задач, для механического решения которых существовали общие правила, играющие роль наших формул. При этом и в тех случаях, когда задачи формулировались как геометрические, вавилоняне обращались с входящими в них величинами просто как с числами, складывали «длины» и «площади», не ограничивали себя пространственными образами, не связывали каждое отдельное преобразование с истолкованием, исходящим из данных задачи.

Прием введения вспомогательного неизвестного послужил, по предположению Нейгебауэра [71], вавилонянам и для получения правил образования «пифагорейских чисел»

Поскольку вавилоняне не указывали в задачах приемы числовых вычислений, а помещали только готовые результаты вместе с предписанием «делай так», мы можем строить лишь более или менее обоснованные догадки о том, как они извлекали квадратный корень из чисел. Возможно, что они поступали по правилу, соответствующему нашей формуле $\sqrt{a^2+b^2}\approx a+b^2/2a$, где a есть наибольший полный квадрат, заключенный в подкоренном числе. Возможно также, что, отыскивая $\sqrt{2}$, они за первое приближение брали сначала $\frac{3}{2}=1+\frac{30}{60}$, а сделав проверку $\left(\frac{3}{2}\right)^2=2+\frac{15}{60}$, заметили, что оно получено с избытком, а следовательно, $2:\frac{3}{2}=1+\frac{20}{60}$ — с недостатком. Тогда они брали среднее обоих значений $\frac{1}{2}\left(1+\frac{30}{60}+1+\frac{20}{60}\right)=1+\frac{25}{60}$, которое было одним из приближений, принимаемых вавилонянами. Повторение этого процесса давало $\left(1+\frac{25}{60}\right)^2=2+\frac{25}{60^2}$, а это показывало, что $1+\frac{25}{60}$ слишком большое приближение; деля $2:\left(1+\frac{25}{60}\right)=1+2\frac{24}{60}+\frac{42}{60}+\frac{21}{60^3}$, получали слишком малое приближение, а взяв из обоих среднее, получали $\frac{1}{2}\left(1+\frac{25}{60}+1+\frac{24}{60}+\frac{42}{60^2}+\frac{21}{60^3}\right)=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$, т. е. второе приближение вавилонян.

Таким же путем, возможно, было получено приближение $\sqrt{3}=1+\frac{45}{60}$. Этот же метод был применен 2000 лет спустя Птолемеем для вычисления его знаменитых таблиц.

Отметим, что этот «вавилонский метод» извлечения квадратного корня можно применить и для нахождения $\sqrt[n]{a}$. Если b_1 — первое приближение (найденное путем проб), то находим $c_1=\frac{a}{b_1^{n-1}}$, и второе приближение $b_2=\frac{1}{n-1}[(n-1)b_1+c_1]$; повторяя этот процесс, который, как нетрудно доказать, сходится, можно вычислить корень с любой точностью, причем для практических целей уже b_2 может оказаться достаточным.

У древних вавилонян встречаются также задачи, которые мы решаем при помощи уравнений третьей степени и особых типов уравнений четвертой, пятой и шестой степеней, легко сводящихся к квадратным или к кубическим уравнениям. В этого рода уравнениях требуется обыкновенно определить «длину», «ширину», «глубину», «объем выкопанной земли», причем эти понятия воспринимаются отвлеченно, что видно из того, что «объем» — или произведение xyz — свободно складывается с «сечением», т. е. с произведением xy.

Задачи вроде $ax^3+x^2=c$ вавилоняне приводили к «нормальному виду» $x^3+x^2=d$, и затем находили x по таблицам корней этого вида уравнений. Выяснить, чем руководствовались вавилоняне, осуществляя это приведение (опирались ли они на геометрические представления, как предполагают некоторые историки математики, или, как полагают другие, рассуждали чисто «алгебраически»), пока установить не удалось. Совершенно не разгаданным остался пока способ решения вавилонянами еще более трудных уравнений вида $ax^3+bx^2+cx=d$; непонятно, каким образом они пользовались таблицами корней уравнений $x^3+x^2=d$.

Оценка уровня вавилонской математики. До недавнего времени считалось, что геометрические знания древних вавилонян значительно уступали их арифметико-алгебраическим познаниям. Из того обстоятельства, что в списках числовых технических коэффициентов, вперемежку с данными о «кирпичах», «меди», «торговом судне», «ячмене», «наследстве» и т. д. встречались и «треугольник», и «круговой сегмент», Нейгебауэр заключал, что геометрия не рассматривалась как теория, а только как приемы практического измерения. Указывалось на то, что наряду с точными встречаются лишь приближенные формулы. Считалось также, что вавилоняне вычисляли длину окружности как равную трем диаметрам, что значительно уступает египетской точности.

Но в 1939 г. в Сузах, древней столице Элама, были найдены новые математические клинописные тексты, расшифрованные и опубликованные в 1950 г. Брейнсом. Это новое открытие показало, что геометрические знания древних вавилонян стояли на большой высоте. На одной из табличек решается задача на вычисление радиуса круга, описанного вокруг равнобедренного треугольника с основанием, равным 60, и сторонами, равными 50 каждая; радиус равен $31+\frac{15}{60}$. На другой табличке отыскивается радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, откуда следует, что здесь $\sqrt{3}$ принят равным $1+\frac{45}{60}$. Наибольший интерес представляет табличка, содержащая список технических коэффициентов, среди которых имеются и данные, характеризующие равносторонний треугольник, квадрат, пяти-, шести- и семиугольник и круг. Из таблички следует, что вавилоняне здесь пользовались приближением

$$\pi \approx 3+\frac{7}{60}+\frac{30}{60^2}, \text{ т. е. } \pi \approx 3{,}125.$$

В одной из задач требуется разделить прямоугольный треугольник на подобный ему треугольник и трапецию так, чтобы произведения частей сторон, а также произведения частей площадей были заданными величинами, причем гипотенуза меньшего треугольника была дана. Замечательно то, что произведение площади на площадь никак не могло представляться чувственно-наглядно, значит, утверждение о развитом абстрактном алгебраическом мышлении вавилонян бесспорно. Одна из табличек содержит даже задачу, приводящую, выражаясь современным языком, к уравнению восьмой степени, в то время как прежде нам были известны лишь задачи, приводящие самое большое к уравнениям шестой степени.

Новые документальные материалы, число которых все возрастает, ясно показывают, что уровень математических знаний вавилонян был значительно выше, чем это казалось прежде на основании лишь немногочисленных расшифрованных и правильно понятых находок.

Сравнивая математику древней Месопотамии с математикой Древнего Египта, мы замечаем, что вместе со своеобразием — различием в системе счисления и вычислительной техники — в науке обеих стран имелось очень много общего, вызванного сходными экономическими и социальными условиями, господствовавшими в них. И там и тут решались задачи, вызванные потребностями орошения, земледелия, строительства, хозяйственного учета и отношениями собственности, измерения времени. И там и тут задачи излагаются догматически, без оснований и доказательств, хотя совершенно очевидно, что результаты не могли быть получены одним лишь эмпирическим путем, а предполагали теоретическое мышление. Так, по мере нахождения новых, ранее неизвестных исторических документов, менялись наши взгляды на уровень математических знаний вавилонян. Этот уровень оказался значительно выше, чем считалось прежде, в том числе и в области геометрии. У нас имеется поэтому основание допустить, что и наша оценка египетской математики, основывающаяся на весьма скудных источниках, окажется заниженной, когда будут открыты новые данные.

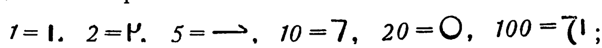
Алгебраический метод мышления, подготовленный еще в недрах арифметики и элементарной геометрии в раннерабовладельческом обществе, перешел затем, вместе с другим культурным наследием, от обоих великих народов Древнего Востока к индийцам и грекам, а возможно, и в Китай, и отсюда через арабов и народы Средней Азии к народам Европы.

Математика других народов Ближнего Востока. Археологи обнаружили в северо-восточной части Месопотамии памятники, относящиеся к четвертому тысячелетию до н. э., древней культуры, для которой характерны геометрические орнаменты на глиняных сосудах. Позднее здесь образовалось могучее ассирийское раннерабовладельческое государство, достигшее в середине второго тысячелетия до н. э. и в IX—VII вв. своего расцвета. Ассирия, крупная держава, подчинившая себе многочисленные соседние народы, торговавшая с отдаленными странами, имела высоко развитую технику, архитектуру, особые инженерные войска, организацию государственной связи, прекрасно поставленное дорожное дело, тщательно разработанную систему налогов, для которой периодически производилась перепись населения и имущества. Ясно, что без развитых математических знаний эти культурные достижения были бы невозможны. Ассирийцы использовали наследие шумерийцев и вавилонскую культуру, в том числе и в области математики. Однако вопрос о собственном вкладе ассирийцев в математику еще недостаточно исследован.

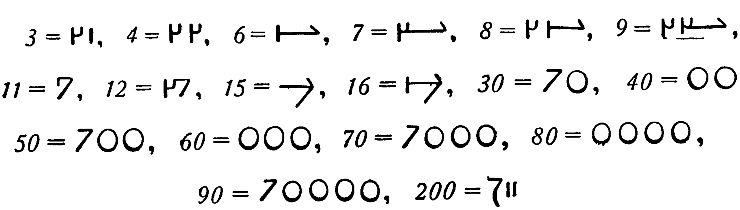
Аналогично обстоит дело и с другими древними народами, образовавшими раннерабовладельческие государства на Ближнем Востоке. Таковы были хетты, заселявшие восточную часть Малой Азии и Северную Сирию, где, начиная с третьего тысячелетия до н. э., они образовали крупное рабовладельческое государство с большими городами. Иероглифическая, а затем клинописная письменность хеттов, расшифрованная известным чешским ученым Б. Грозным, отмечает в законах XIV в. до н. э. установленный государством эквивалент весовых единиц металла, а именно:

«240 весовых единиц меди = 4 минам меди = 1 шекелю серебра», что ясно говорит о применении хеттами шестидесятеричной системы счисления, перенятой ими у шумерийцев и вавилонян.

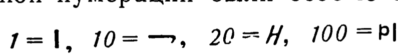
В Сирии и Финикии, где уже в третьем тысячелетии до н. э. возникли рабовладельческие государства с широко развитыми ремеслами, морской и сухопутной торговлей, существовала алфавитная письменность и непозиционные системы нумерации. В сирийской системе имелись особые знаки:



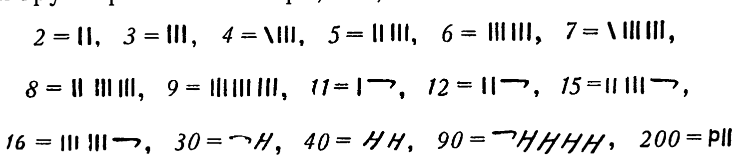
их сочетанием образовывались знаки остальных чисел, например:



В финикийской нумерации были особые знаки



из них составлялись знаки остальных числительных, причем они группировались по три; так, записывались:



Финикийская система нумерации, по-видимому, имеет общее происхождение с вавилонской. На это указывает сходство знаков для 1 и 10 (то, что знаки для 10 направлены в разные стороны, объясняется тем, что вавилоняне писали слева направо, а финикияне — справа налево), причем финикийская система была, должно быть, более древней. Знак для 1, по-видимому, изображал палец, знак для 10 — две руки, знак для 20 — «целого человека» (этот знак вавилоняне отбросили). Возможно, что у вавилонян был знак, аналогичный финикийскому знаку для 100, который, может быть, обозначал 60 (если в финикийской системе нумерации отбросить знак для 100, то получится позиционная система).

Финикийское письмо (как и в других семитических языках, в финикийском писались одни только согласные) произошло из иероглифического письма, возникшего под влиянием египетской письменности. Из финикийских букв возникли потом еврейские, арабские и греческие буквы, а из последних — латинские и русские. Таким образом, финикиянам принадлежит величайший вклад в мировую культуру — создание алфавита.

Финикияне и родственные им древние евреи, в государствах которых большую роль играли писцы, вместе с алфавитной письменностью пользовались и алфавитной записью чисел, основанной на десятичной системе счисления их алфавита.

В алфавитной нумерации древних евреев 22 буквы их алфавита, к которым добавлялись пять букв в их начертании в конце слов, оказались как раз достаточными для обозначения цифр: от א до ט (1—9), от י до צ (10—90), от ק до ץ (100—900); при этом, чтобы отличить цифры от букв, над ними ставилась точка. Числа 1000 и выше обозначались теми же буквами, что и 1, 2, т. е. א̈, ב̈, и т. д., но над ними ставились две точки или ש — начальная буква слова «шинаим» (два), например א. Таким образом, например, число 1119, при общем направлении письма справа налево, записывалось так: א̌קיט. Этот способ записи чисел давал повод истолковывать любое слово как определенное число, на чем и была позднее построена числовая мистика («гематрия») каббалы. Так, например, случайное совпадение: сумма числовых значений букв слова «год» שנה давала 355, что совпадало с количеством дней древнееврейского лунного года, — объявлялось делом божественного провидения.

Математические знания древние евреи заимствовали у вавилонян и египтян; для числа π, как об этом свидетельствует Ветхий Завет, они принимали значение 3. Так, рассказывая о дворце царя Соломона, третья книга «Царств» (гл. 7, стих 23) говорит: «И сделал литое из меди море, — от края его до края десять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимает его кругом». Об этом же «медном море», но уже не при дворце Соломона, а при построенном им храме, почти теми же словами говорится и во второй книге Паралипоменон (гл. 4, стих 2).

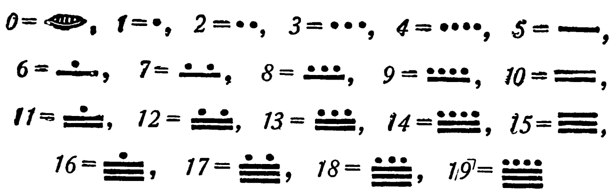
Вавилонская математика была перенята также древними обитателями Ирана. Древние жители Апеннинского полуострова — этруски — обладали вместе с письменностью записью чисел и зачатками элементарной математики, но математическая сторона их культуры мало исследована.

Мы не будем касаться здесь состояния математики в древних Индии и Китае, о чем для цельности изложения говорится во второй части. Остановимся еще на весьма примечательной культуре народа майя.

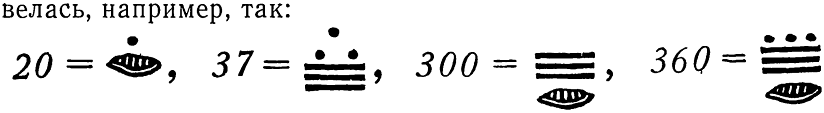
Математика и нумерация народа майя [72, 73, 74]. В центральной Америке, на полуострове Юкатан в Мексиканском заливе, индейский народ майя перешел примерно в первом тысячелетии до н. э. к подсечно-огневому земледелию, к разведению хлебного злака маиса (кукурузы), который стал подлинной основой материальной жизни этого народа и дал ему и его имя. Позднее здесь образовалось раннерабовладельческое общество, достигшее в IV—VI вв. н. э. наивысшего расцвета. Оно просуществовало вплоть до испанских завоеваний 1527—1697 гг. Государство майя управлялось по наследству верховными жрецами. Здесь применялись лишь деревянные и каменные орудия, а металл служил только для украшений. Колесо не употреблялось ни в гончарном деле, ни для повозок. Однако ремесла, торговля и искусство достигли у народа майя больших успехов, и накопились значительные научные знания. Существовало около десятка крупных городов с каменными дворцами и храмами в виде ступенчатых пирамид, достигавших 45 *м* высоты и служивших также обсерваториями. Высоко была развита медицина, а в особенности астрономия. Особая форма земледелия майя нуждалась в точном определении времени полевых работ: вырубки леса, выжигания (оно должно было совпасть с сухим сезоном, наступающим там в марте—апреле) и т. д. Уже за четыре столетия до н. э. у майя существовал календарь и датирование производилось с большой точностью. Письменность майя была иероглифической, но она, сохранив еще некоторые черты пиктографического письма, находилась на более ранней стадии развития, чем египетская, переходившая уже в фонетическую.

Уже в IV в. до н. э., т. е. за 1600 лет до XII в. — начала распространения позиционной системы записи чисел в Европе, майя имели позиционную систему счисления с основанием 20 и нулем. Числительные записывались двумя способами: либо в виде иероглифов, либо с помощью точек и тире, причем именно второй способ служил для счета и прежде всего для календарных расчетов, содержал нуль и строился по двадцатиричной системе, сохранившей следы более древней пятеричной системы. Последнее обстоятельство этнографы приводят как одно из доказательств того, что майя, как и вообще индейцы, в незапамятные времена переселились в Америку, перейдя Берингов пролив из северо-восточной Азии, обитатели которой по сей день сохранили в своих языках пятеричную систему счисления.

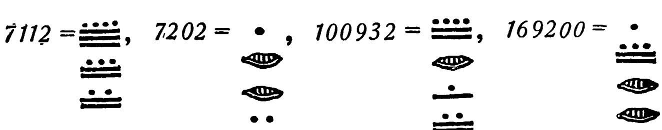
Нуль изображался в системе майя в виде ракушки (а не «закрытого глаза», как прежде ошибочно толковали этот знак), и первые 19 чисел записывались так:



Таким образом, здесь пользовались только тремя знаками и лишь одним сложением. Как и все письмо майя, числа записывались столбцами, идущими справа налево, причем снизу вверх, следуя от низших разрядов к высшим. В следующем, втором разряде, только что приведенные знаки имели значение в 20 раз больше, чем в первом; следовательно, запись велась, например, так:



Однако в третьем разряде, но только при счете времени, делалось исключение: третья единица бралась не в 20, а в 18 раз больше второй, а следовательно, в 360 раз больше первой единицы, что было ближе к продолжительности года, чем 20^2. Таким образом, получалось, например,

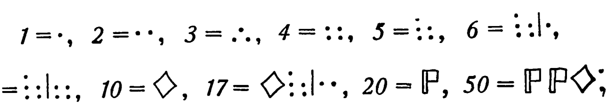


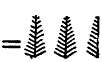
Наибольшее, записанное этим способом число, найденное в немногочисленных письменных памятниках культуры народа майя (большинство их, записанных на коре, было варварски сожжено испанскими завоевателями, считавшими все культурные ценности майя языческим дьявольским колдовством), равно 1 841 641 600 дням, или 5 042 277 годам. Для записи дробей у майя либо не было знаков, либо они до нас не дошли.

Иероглифические числовые знаки изображались в виде голов божеств 13 месяцев священного года «тцолкин», насчитывавшего $13\times 20=260$ дней, в противоположность гражданскому году «хааб», который имел $18\times 20=360$ плюс 5 заключительных дней. Кроме того, имелся также иероглиф для нуля. Эта система была в некотором смысле десятичной; иероглиф числа 10 представлял собой череп, нижняя челюсть которого при образовании дальнейших высших числовых знаков просто прибавлялась к соответствующим низшим знакам. Чтобы написать 16, к голове, означающей 6, подрисовывали эту челюсть, т. е. $6+10=16$.

Несмотря на то, что никакие прямые свидетельства о математических знаниях майя не сохранились, вряд ли можно сомневаться в том, что они находились на значительном уровне. Сложный и точный счет времени у майя не мог бы возникнуть без достаточно прочных и обширных математических знаний. У майя единицей времени были сутки «кин», 20 «кин» составляли «уинал», 18 «уинал» — «тун», 20 «тун» — «катун», 20 «катун» — «бактун», 20 «бактун» — «пиктун», 20 «пиктун» — «калабтун», 20 «калабтун» — «кинчилтун», 20 «кинчилтун» — «алаутун» = 23 040 миллионам суток (т. е. единица восьмого разряда). Майя комбинировали счет времени по религиозному календарю «тцолкин», по-видимому, более древнему, со счетом по гражданскому календарю «хааб», давая дням двойную нумерацию. У них существовала своя эра — условное начало летоисчисления, и они знали, что повторение календарных дат (совпадение дней месяца и начала года) может наступить лишь через 374 440 лет. Хотя они не применяли колеса в технике, для пересчета дней с одного календаря в другой они пользовались «колесом счета» («уазаклом катун») — графическим изображением дней по кругу. Считая гражданский год равным 365 дням, майя исправляли разность между ним и астрономическим годом, равным 365,2422 дня, подобно тому как делаем это мы, вводя високосный год. Благодаря этому год майя был всего на 2 десятитысячные суток короче астрономического года — точность поразительная, превышающая точность юлианского календаря. Майя знали Полярную звезду и ряд созвездий, имели таблицу предстоящих солнечных затмений. Они наблюдали восход и заход Венеры и с большой точностью знали период ее синодического обращения; зная, что он меньше 583,935 дня (в действительности он равен 583,920 дня), они все же принимали его равным 584 дням, так как $5 \times 584 = 8 \times 365$, благодаря чему пересчеты упрощались. Очевидно, что подобные выкладки предполагают не только уверенное обращение с большими числами, но и знание их арифметических свойств.

Математика ацтеков и инков. На западном материке развитыми математическими знаниями, кроме народов майя, обладали также ацтеки, образовавшие в XII в. н. э. в Мексике раннерабовладельческое государство, и инки, которые достигли той же ступени общественного развития в Перу в XI—XIII вв. н. э. Ацтеки, имевшие иероглифическое письмо и солнечный календарь, пользовались двадцатиричной непозиционной системой нумерации; числа они записывали так:



следующей высшей единицей было 400 = , из которой путем деления получались 200 = , 100 =  и 300 = ; затем обозначались, например, 500 = , 1000 = , а для 800 имелся особый знак . Инки, как мы уже отмечали, имели узелковое письмо «квипу», при помощи которого они не только производили хронологические записи выдающихся событий, но и расчет податей, бухгалтерский учет и т. п., для чего имелись чиновники, обучавшиеся в особых школах (см. [75]). Однако об уровне развития математических знаний ацтеков и инков можно в основном судить лишь косвенно по сохранившимся остаткам их материальной культуры, замечательной архитектуры, системы ирригации, дорожного дела, ремесел и искусств, так как испанские завоеватели — католические фанатики в начале XVI в. варварски уничтожили все, что только смогли.

Общие выводы о развитии математики в раннерабовладельческом обществе. Сравнивая между собой развитие математики в различных деспотических раннерабовладельческих государствах, мы замечаем, что, несмотря на специфические особенности, которые принимало в них это развитие, главнейшие его черты были повсеместно сходными. Из зачатков счета, имевшихся в доклассовом обществе, под влиянием потребностей государства здесь постепенно возникла элементарная математика, пользующаяся в неявном виде алгебраическими методами и достигшая высокого искусства вычислений с большими числами. На этом уровне математика носила в значительной мере эмпирический характер. Большинство ее положений и приемов было найдено, по-видимому, на ощупь, и в преподавании излагалось без доказательств, даже если такие существовали. И все же тогда уже в ней имелись первые ростки абстрактных, обобщающих, теоретических методов математического мышления. Но выделения математической теории в осознанную систему идей здесь не произошло, да и не могло произойти. В деспотических раннерабовладельческих государствах занятие математикой было делом, непосредственно подчиненным казенным утилитарным интересам, в первую очередь сбора налогов и обмера земель, и находилось в руках сословия мелких должностных лиц — сборщиков податей, землемеров и писцов, не обладающих широким кругозором. У таких людей отвлеченные интересы, как правило, могли возникать разве только в процессе преподавания, из стремления упростить и облегчить его. Теоретической наукой математика стала поэтому лишь тогда, когда рабовладельческое общество вступило в новую фазу, когда оно превратилось в рабовладельческую демократию, а вместе с тем породило общественную идеологию и классы, сделавшие теоретическую математику возможной и необходимой. Это произошло в Древней Греции.

ГЛАВА III

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Общественные условия Древней Греции. Древнегреческие рабовладельческие государства, возникшие в VIII—VI вв. до н. э., появились в результате длительного процесса разложения первобытно-общинного строя. Это были самоуправляющиеся города-государства — полисы. Главные из них образовались на средней части западного побережья Малой Азии, в Ионии, как торговые центры на путях, связывающих Египет, Месопотамию и Скифию. Среди них выдающееся положение долго занимал Милет. На побережье самой Греции позже занял ведущее место Коринф, а затем Афины, в Италии — Кротон и Тарент, в Сицилии — Сиракузы. Освобождаясь постепенно от пережитков родового строя, греческие полисы переходили затем от раннерабовладельческой тирании к рабовладельческой демократии, наиболее прогрессивной для этого времени общественной системы. В Афинском государстве этот процесс завершился к 500 г. до н. э. В дальнейшем афинская рабовладельческая демократия, в итоге греко-персидских войн подчинившая себе многочисленные города на Балканах и в Малой Азии, превратилась в политический, экономический и культурный центр античного мира. Достигнув в 40-х и 30-х гг. V в. до н. э. при Перикле вершины своего расцвета, рабовладельческая демократия дала равные политические права всем своим гражданам, которыми, однако, являлось лишь привилегированное меньшинство населения; рабы, женщины и метеки (не уроженцы области Аттики) политическими правами не пользовались.

Рабовладельческая демократия родилась вследствие многовековой ожесточенной борьбы между демосом, — ремесленниками и мелкими торговцами, и родовой аристократией, —

помещиками, а также и олигархией — богатыми купцами. При ней свободные граждане активно участвовали в политической жизни, в выборах законодательных государственных органов, в судах присяжных, в многочисленных публичных диспутах политических партий. В IV в. до н. э. в результате продолжительных войн и начавшегося упадка рабовладельческой экономики рабовладельческая демократия переживала глубокий кризис. Однако демократический характер греческой общественной мысли сохранялся и под властью персов и в период эллинизма.

В отличие от раннерабовладельческого общества, располагавшего лишь медью, бронзой, серебром и золотом, рабовладельческая демократия родилась в век железа. Усовершенствование оружия и орудий труда сделало войны более опустошительными, но в то же время привело к значительному увеличению общественного прибавочного продукта, к повышению жизненного уровня народа, к дифференциации ремесел, к расширению торговли, а вместе с ней и мореплавания. Эта новая экономика привела к введению в качестве всеобщего эквивалента обмена чеканных денег вместо прежних весовых. Легко усваиваемый алфавит окончательно вытеснил неуклюжее иероглифическое письмо. Культура, доступная у египтян и вавилонян одной лишь бюрократии, распространялась среди более широких слоев. Определяющее значение сыграло изменение характера рабовладения, носившего в ранних Афинах патриархальный, «домашний» характер, и превратившегося затем в основу существования общества. Массовый рабский труд сопровождался паразитическим образом жизни рабовладельцев, относившихся с презрением к труду, разрывом между физическим трудом рабов и умственным трудом, которым занималась лишь небольшая часть рабовладельческой верхушки и другого свободного населения. Свободные граждане полисов, пользуясь рабским трудом, имели некоторый досуг, дающий им возможность размышлять над отвлеченными вопросами, заниматься наукой не только ради непосредственно практических целей, но и для построения философской картины мира. Неустанная политическая борьба, в которой они завоевали и отстаивали свою свободу, расширение кругозора в результате географических открытий, сделали мировоззрение греческих граждан подвижным, не похожим на застывшее мировоззрение египтян и вавилонян. Неоднократно свергая власть тиранов, они не остановились и перед тем, чтобы низвергнуть мифических небесных владык — богов, создавая свои философские системы: идеалистические, отражавшие интересы реакционной аристократии, и материалистические, выражающие интересы демоса.

Характер древнегреческой математики. Источники. Потребности развивавшегося в древнегреческих полисах ремесленного производства и строительства, прогресс сельского хозяйства и мореплавания настойчиво требовали и развития научных знаний. При рабовладельческом строе основной двигательной силой оставалась мускульная сила рабов и скота и применялись почти исключительно лишь ручные орудия. Тем не менее, в военном деле уже появились метательные и осадные машины, и ни монументальное греческое зодчество, ни строительство торговых и военных кораблей не могли обойтись без применения технических изобретений. Начиная с VII в. до н. э., здесь, и прежде всего в Ионии, на стыке египетской и вавилонской культур, начинает зарождаться нерасчлененная наука, в которой астрономические, метеорологические, математические, механические и медицинские знания объединены в одно целое с философскими, политическими, географическими и экономическими представлениями.

В эту эпоху греки черпали свои знания из египетских, вавилонских и финикийских источников. Характер этих знаний был преимущественно практический. Древнегреческий историк Геродот (около 484—425 гг. до н. э.) описывает это следующими словами ([76], стр. 109): «Жрецы же рассказывали, что этот царь (Сесострис) разделил страну между всеми египтянами, причем все они получили по одинаковому четырехугольному участку земли; этим он создал для себя доходы, приказавши уплачивать ежегодно известный налог. Если река (Нил) отрывала кусок от какого-нибудь участка, то владелец его являлся к царю и объявлял о случившемся. Царь посылал нескольких людей для осмотра и измерения, на сколько потерпевший участок уменьшился, дабы впредь владелец его платил все-таки соответственно установленному первоначально налогу. Мне кажется, таково было происхождение геометрии, из Египта перешедшей в Элладу. Что касается солнечных часов, солнечного показателя (гномона) и деления дня на двенадцать частей, то все это эллины заимствовали от вавилонян». Исократ (около 390 г. до н. э.) указывает, что математические знания были переняты греками у египтян, жрецы которых, «„пренебрегая удовольствиями”, выполняли важнейшие поручения, обучали молодежь, занимались астрономией, счетом и геометрией». Величайший мыслитель древности Аристотель (384—322 гг. до н. э.) в «Метафизике» также отмечает египетское происхождение греческой геометрии ([77], стр. 20 (982a)). Сходный взгляд высказывает и Прокл (410—485 гг. н. э.) в сводке истории греческой геометрии в своих комментариях к «Началам» Евклида ([78], стр. 67). И хотя комментарии Прокла были написаны в V в. н. э., в них сохранились традиции Евдема Родосского — IV в. до н. э.

Преемственность математических знаний, следовательно, не подлежит никаким сомнениям. Египетская и вавилонская математика, как мы видели, носила конкретно практический характер, но содержала первые зачатки теории. Очевидно, что эти ростки абстрактно-математического мышления первоначально были перенесены в Грецию из этих стран древней культуры. Однако среди части буржуазных историков и философов господствует другой взгляд. Многие из них либо вовсе отрицают, что математика Древнего Востока оказала серьезное влияние на развитие греческой математики, так как, якобы, первая была «магической», а не научной, как вторая (см. [79, 80]), другие признают, что греки позаимствовали кое-что у египтян и вавилонян, но это были только прикладные знания (см. [81]). Как теоретическая наука математика будто бы целиком является созданием древних греков. Она, якобы, порождена их особым «эллинским духом», тем же, который создал и греческое искусство, и который не то присущ их крови, не то плод природы Эгейского архипелага. Для подкрепления этого идеалистического взгляда они ссылаются на высказывание, приписываемое великому греческому философу-материалисту Демокриту (около 460—370 гг. до н. э.), совершившему путешествие по Египту, Персии и Месопотамии: «Я побывал во многих странах... беседовал со многими учеными людьми, но что касается сочетаний линий с доказательствами, то меня никто не превзошел, даже те, кого зовут в Египте гарпедонаптами» (см. [82]).

Но это высказывание как раз признает за гарпедонаптами умение давать геометрические доказательства. Значит, оно не в пользу тех, кто утверждает, будто доказательства — порождение особого «греческого духа». Из него вытекает лишь, что греки сумели в области математики пройти в течение двух столетий (Демокрит жил на рубеже V и IV веков) развитие, для которого египтянам потребовались два тысячелетия. И это ускорение объясняется, конечно, не расовыми и географическими особенностями, а разницей в общественных укладах обоих народов.

Вначале древнегреческая математика не отличалась принципиально от египетской и вавилонской. Но с развитием рабовладельческой демократии, начиная с VI в. до н. э., в математическом мышлении греков все больше усиливается теоретическая сторона. Рабам стали поручать «черную» умственную работу, — переписывание книг, производство вычислений, — что в конце концов привело и к отделению теоретической математики от практической. От практической арифметики, называвшейся «логистикой», и прикладной геометрии, получившей у Архимеда название «геодезии», начинают отделяться теоретическая арифметика и теоретическая геометрия, хотя они, подобно другим наукам, не являлись тогда еще самостоятельными дисциплинами, а входили как составные части в философию. В отличие от практических, теоретическая арифметика и геометрия не только содержали предписания, как решать задачи, но и давали обоснование, почему верно решение. И это введение в математику доказательств давало, как в этом вскоре убедились, возможность обобщать получаемые частные результаты, получать новые выводы. В математике, так же как и в политических и судебных спорах, становилось нужным давать точные определения понятий, развивать строгие доказательства. Не случайно пифагорейцы, введшие доказательство, были не только философской школой, но и политической партией реакционной рабовладельческой аристократии. Логическая аргументация великих риторов вошла в математику. Демокрит, внесший значительный вклад в развитие греческой математики, был вместе с тем и автором первого труда по логике. «Начала» Евклида и логика («Аналитики») Аристотеля по своему духу взаимосвязаны и имеют общие исторические корни.

Именно освобождение теоретической математики от ее подчинения узко прикладным задачам, создание в ней вместо простых рецептов строго логических методов, дающих возможность широких обобщений и новых выводов без прямого обращения к действительности, и являлось непосредственной причиной чрезвычайного ускорения ее развития, обусловленного в конечном счете материальными потребностями общества. Занимавшиеся математикой философы стали понимать значение математики как науки, которая, как и другие науки, должна объяснять явления человеку для того, чтобы он мог использовать их в своих целях.

Окончательное выделение математики в самостоятельную теоретическую науку произошло в Греции в середине V в. до н. э., найдя свое завершение уже в эллинистическую эпоху в «Началах» Евклида, примерно 300 г. до н. э. На протяжении трех предшествовавших веков, в классический период развития, оно подготовлялось накоплением элементарных знаний, а главное, все возрастающим усилением теоретических, логических моментов в греческой математике. Первоначально разрозненные доказательства лишь отдельных теорем стали общим правилом. Отчетливо начали выделять исходные понятия и положения, по возможности избегать обращения к наглядности и, заменяя его логическими выводами, все полученные знания приводили в стройную систему.

Так же как и естествознание, математика, начиная с самого своего формирования как науки, явилась ареной борьбы двух философских лагерей — материализма и идеализма. Борясь против религиозных мифологических фантазий, древнегреческие философы, разделявшие стихийно-материалистические и наивно-диалектические взгляды, искали в самой природе начало бытия, и математика служила средством, содействовавшим им в этих поисках. Между тем философы-идеалисты усматривали в числах начало всех вещей, а в математике — основу всей науки, которую они постепенно превратили в наукообразную спекуляцию, в «аритмологию» — игру с «мистическими» свойствами целых чисел. Таким образом, пока математика не обособилась от философии, борьба материализма против идеализма происходила непосредственно внутри самой математики.

Как для всей греческой классической литературы, так и для математической характерна крайняя скудость оригинальных источников. С VI в. до н. э. сохранилось лишь несколько предложений, приписываемых древним авторам, приведенных вместе с различными легендами в более поздних сочинениях. От V в. до н. э. осталось лишь немного фрагментов, и только начиная с IV в. до н. э. имеются вначале частичные, а позже и полные тексты. Восстановить истинную историческую картину мешает не только редкость документов и их разбросанность в различных произведениях, но, в особенности, то, что последние не вполне надежны. Они составлены комментаторами и компиляторами, чаще всего не знакомыми с оригиналами, а пользующимися их переложениями из вторых, а то и третьих рук. Так, например, философ-неоплатоник Прокл (V в. н. э.) передал в своих комментариях к Евклиду [78] утерянную «Историю геометрии и астрономии» Евдема Родосского (второй половины IV в. до н. э.), основываясь на изложении Гемина (I в. до н. э.). Но Прокл, — а так поступали и некоторые другие,— излагал историю пристрастно, он умалчивал о материалистах и преувеличивал значение идеалистического пифагорейского направления. Некоторые сведения о состоянии математических знаний в древнейшее время можно получить также из философских сочинений Платона и Аристотеля, в которых нередко затрагиваются различные, в особенности общепринципиальные проблемы математики.

Благодаря всем отмеченным обстоятельствам в сохранившиеся сведения о греческой математике вошло немало легендарных, недостоверных моментов. Однако настойчивыми, обширными и глубокими исследованиями ученых, в том числе и советских, была в основном воссоздана картина формирования греческой математики. Правда, эта картина не лишена положений, требующих дальнейших уточнений, а иногда и коренного пересмотра.

Греческая логистика [83, 84]. В Афинах сыновьям свободных граждан с семилетнего возраста в грамматических школах наряду с чтением и письмом преподавался счет, однако никакие руководства по практической арифметике — логистике — не сохранились. Наши знания о логистике опираются лишь на косвенные данные. Объясняется это тем, что счет производился устно при помощи абака, преподавание велось по раз и навсегда установившемуся порядку, обходилось без учебников.

В логистику входило искусство счета, т. е. знание системы счисления и уменье производить на абаке четыре арифметических действия с целыми положительными числами, далее действие над дробями и применение этих знаний к землемерии и практическим задачам повседневной жизни. Позднее сюда вошло и вычисление квадратных и кубических корней, а также решение задач, относившихся сначала к именованным, а у Диофанта и к неименованным величинам, задач, которые мы включаем в арифметику и алгебру.

Различие между практической и теоретической математикой в дальнейшем вследствие отрыва господствующих классов рабовладельческой демократии от производительного труда превратилось в их противопоставление. Это противопоставление практической логистики теоретической математике выражалось в том, что идеалисты-пифагорейцы (V в. до н. э.) и платоники (IV в. до н. э.) усматривали непроходимую пропасть между числами и исчисляемым. Числа («аритмой») были для них «чистые идеи», такой идеей было и неделимое «единство» — ими должна была заниматься математика. Исчисляемое же принадлежало к чувственно-воспринимаемым предметам, сюда входила и делимая «единица», — всем этим занималась логистика; числа здесь были «числами, имеющими тела» («аритмой сомата эхонтес»), по выражению Платона ([85], стр. 370 (52 5*D*); см. сноску переводчика к этому листу). Также считали, что, в противоположность геометрии, занимающейся мысленными прямыми, геодезия применяет лишь чувственно-воспринимаемые «отчасти тонкие, как солнечные лучи, отчасти толстые, как веревки» (см. [78], стр. 39).

Греки понимали под числом («аритмос») целое положительное число, которое рассматривали как собрание единиц. При этом сама единица не рассматривалась как число. Хотя этот первоначальный взгляд на число как бы господствовал во всей греческой математике, все же удержаться целиком он не смог. Наряду с числами, практика вынуждала греков заниматься отношениями («логой») отрезков в геометрии, численное значение которых выражалось (в тех случаях, когда его удавалось установить) не только в числах (т. е. в целых числах), но и в дробях. А так как действия над отношениями фактически сводились к действиям над их количественными значениями, то проводимое строгое различение между отношениями и числами постепенно стиралось.

На этом различении особенно настаивали идеалисты, придерживавшиеся пифагорейского учения об избранности целых чисел, составляющих сущность бытия, о неделимости единицы и т. п. Но математики-материалисты, например Архимед, Герон, Евтокий или Диофант не придерживались этого учения. Они широко применяли, как мы увидим в дальнейшем, арифметико-алгебраические приемы и доказательства к геометрии, применяли дроби и приближенные вычисления, занимались приложениями математики к естествознанию и технике, ссылаясь при этом, чтобы обезоружить своих противников, на то, что подобные приемы применялись «древними».

Древнегреческий счет. Греческий счет был десятичный, с сохранившимися следами значительно более древнего четверичного счета: числительное «окто» — 8 — имеет грамматическую форму двоичного числа. При небольших числах греки считали на пальцах, при больших — с помощью камешков («псефос»), выкладываемых на земле, а позднее на доске, которая затем для различения разрядов была разграфлена, превратилась в абак. В комедии Аристофана «Осы» (422 г. до н. э.) говорится: «Для начала прикину не так, как в суде, не на счетах, а просто на пальцах» (см. [86], стр. 382). Счет на пальцах велся по пятеркам; так, в «Одиссее» Гомер (вероятно, IX—VIII в. до н. э.) заставляет морского бога Протея «считать пятка́ми» («пемпа́дзестай») тюленей.

Уже у Гомера греки имели числительные до 1000, но не выше; слово «мириой» (мириада) обозначало тогда еще «очень много» (как, впрочем, и у нас) и лишь позже стало употребляться как 10 000. Впрочем, и числительное «гекатон» — 100 — употребляется здесь часто в смысле неопределенно большого количества. Представление о больших числах и умение действовать с ними давалось нелегко. Лишь в III в.

до н. э. Архимедом было написано знаменитое «Исчисление песчинок» («Псаммит»), развеявшее заблуждение о существовании «наибольшего последнего» числа и содержавшее способ, которым можно выразить сколь угодно большое число.

При счете греки пользовались абаком, перешедшим к ним, по-видимому, от египтян, при посредничестве финикийцев; египтяне, как сообщает Геродот, в отличие от греков, передвигали камешки не слева направо, а сверху вниз. На абаке имелось 10 больших двойных столбиков и сбоку четыре простых меньших. В столбики укладывались камешки, позднее замененные особыми счетными жетонами. Большие столбики служили для различения разрядов, которые шли справа налево от низших к высшим, причем для каждого разряда отводились два столбика подряд. Но отношение между разрядами зависело от денежной системы, так как абак служил, прежде всего, для денежных подсчетов при торговых сделках.

У греков наивысшей денежной единицей был талант, равный 6000 драхм, 1 драхма равнялась 6 оболам и 1 обол 8 халкам. Первые два правых больших столбика служили для изображения единиц драхм, третий и четвертый столбики имели значение в 10 раз большее, чем первый и второй; пятый и шестой в 100, седьмой и восьмой — в 1000 раз. Девятый и десятый столбики служили для изображения талантов. Деление столбиков на верхнюю и нижнюю половины использовалось при арифметических действиях; так, например, при сложении в верхней половине выкладывался его результат — сумма. Меньшими столбиками справа пользовались для обозначения числа оболов и халков, причем, начиная справа, каждый соседний с ним левый столбик имел удвоенное значение. То, что счет на абаке был основным способом вычисления, показывает само слово «вычислять» — «псефидзейн», дословно — класть камешки. Проводя вычисления на абаке, греки, как правило, записывали лишь окончательный результат, однако при сложных вычислениях они, подобно нам, отмечали для себя и промежуточные результаты.

Нумерация. С появлением у греков в X в. до н. э. письменности, возникшей на основе финикийского алфавита, стал применяться и письменный счет. Сначала это была геродиановская нумерация, названная так по имени описавшего ее грамматика Геродиана (II в. н. э.). Она имелась в двух разновидностях: аттической и беотийской, названных так по областям Греции. Единица обозначалась просто чертой | (палец), 5 в аттической Г (изображение пятерни), а в беотийской П (которое рассматривалось позднее как сокращение слова «пенте» — 5), 10 — соответственно Δ и ▷, 100 — Η и ⊢Ε, 1000 — Χ и ↓, 10 000 — Μ. Эти знаки являлись начальными заглавными буквами соответствующих числительных дека (10), гекатон (100), хилиас (1000), мириада (10 000). Их сочетанием получались и промежуточные числительные: для 50 в аттической 𐅄, а в беотийской 𐅄, для 500 — соответственно 𐅅, ΠΗΕ, для 5000 — 𐅆 и ↓Π. Остальные числа выражались так же, как это происходило на абаке, например 9 821 писалось (аттически) как 𐅆ΧΧΧΧ𐅅ΗΗΗΔΔΙ.

Геродиановскую нумерацию можно встретить в аттических памятниках, относящихся даже к I в. до н. э., хотя задолго до этого (когда точно, не установлено) в остальных областях Греции ее вытеснила ионийская нумерация. В последней числа изображались буквами алфавита, как у евреев и родственных им финикиян, от которых греки и переняли этот способ. Числа обозначались так:

1–9	$\bar{\alpha}$,	$\bar{\beta}$,	$\bar{\gamma}$,	$\bar{\delta}$,	$\bar{\epsilon}$,	$\bar{\varsigma}$,	$\bar{\zeta}$,	$\bar{\eta}$,	$\bar{\theta}$
10–90	$\bar{\iota}$,	$\bar{\kappa}$,	$\bar{\lambda}$,	$\bar{\mu}$,	$\bar{\nu}$,	$\bar{\xi}$,	$\bar{o}$,	$\bar{\pi}$,	$\overline{\text{ϙ}}$
100–900	$\bar{\rho}$,	$\bar{\sigma}$,	$\bar{\tau}$,	$\bar{\upsilon}$,	$\bar{\varphi}$,	$\bar{\chi}$,	$\bar{\psi}$,	$\bar{\omega}$,	$\overline{\text{ϡ}}$.

Здесь, кроме букв ставшего общепринятым алфавита, использованы еще три устаревшие: ς — «вау», позднее буква, заменяющая букву σ в конце слов, для 6; ϙ — «коппа» для 90; ϡ — «сампи» для 900. Таким образом, с помощью 27 знаков можно было записать все числа до 999. Тысячи обозначались как единицы с запятой перед буквой, например ,α, ,β и т. д. Чтобы различить цифры от букв, над ними ставили либо черту, либо штрих, например, $\bar{\alpha}$, α′. Большие числа, вошедшие в употребление сравнительно позже, записывались по мириадам, например 54 321 как $\overset{\varepsilon}{M},\overline{\delta\tau\kappa\alpha}$, или $\varepsilon,\overline{\delta\tau\kappa\alpha}$; еще позже мириады записывались двумя точками над буквой, например, $5 \times 10^4 = \ddot{\varepsilon}$, $5 \times 10^8 = \ddot{\ddot{\varepsilon}}$.

Ионийская нумерация, возникшая из потребностей расширяющейся торговли, была значительно короче геродиановской; приведенное выше число 9 821 записывалось так: ,θωκα. Знаки цифр произносились не как буквы, а как числительные; поэтому для быстрого действия над ними нужно было только помнить наизусть таблицы сложения и умножения, которые имелись и в готовом виде. Кроме того, так как при умножении и делении многозначных чисел нужно было определять разряд цифр результата, то было введено понятие «основания» («питмен»), например, 700 имеет «основание» 7, то же, что и 7000 и 70 000 и т. д.

Таким образом, вопреки мнению некоторых историков математики, например, М. Кантора и Г. Ганкеля, будто алфавитная нумерация являлась шагом назад по сравнению с аттической, мы считаем, что краткостью и легкостью записи и удобством вычислений для небольших чисел, легкостью усвоения и возможностью записи в ней сколь угодно больших чисел она лишь немногим уступала нашей позиционной десятичной системе. П. Таннери, специально усвоивший в 1882 г. ионийскую нумерацию, убедился на конкретных вычислениях в ее практических достоинствах, которые мы, в силу привычки, склонны отрицать.

Производя сложение в письменном виде, греки не ставили одноименные разряды друг под другом, у них не было ни знака сложения, ни привычной нам черты под слагаемыми, а вместо знака равенства они писали слово «гомóй» («вместе»). Чаще всего слагаемые и их сумма писались просто в строчку. Так же записывались и другие действия. Иногда, впрочем, перед итогом ставился особый знак — сокращение слова «ги́гнестай» — в смысле «получается».

Таблицы. Для облегчения сложения, а также и вычитания служили особые таблицы, часть которых мы здесь приводим:

α	ι	θ	т. е.	1	10	9
α	θ	η		1	9	8
α	η	ζ		1	8	7
. . . .				. . . .		

При помощи заученных или заготовленных таблиц, абака или просто пальцев производилось и вычитание. Отрицательных чисел и нуля как числа греческая математика не знала.

Умножение производилось либо по уже известному нам «египетскому» способу, либо по греческому способу, причем пользовались таблицей умножения, которую нужно было помнить или же иметь под рукой.

Такие таблицы имелись до 10 000. У неопифагорейца Никомаха (около 100 г. н. э.), чье «Пифагорейское введение в арифметику» дошло до нас, имелась квадратная таблица, построенная точно так же, как наша школьная таблица умножения.

Такой таблицей пользовались для вычислений, хотя сам Никомах предназначал ее для других целей — для сопоставления интересовавших его свойств делимости целых чисел. В то время как мы осуществляем умножение многозначных чисел, начиная с низших разрядов (способ, перенятый через народы стран ислама от индийцев), греки начинали с высших разрядов. Сначала умножались «основания», а затем устанавливался разряд. Для упражнения приводились задачи на умножение цифровых значений букв целых строк стихов, что приводило к весьма большим числам. Алфавитный способ обозначения чисел давал всюду, где он встречался (например, у евреев, индийцев) возможность укорениться числовой мистике, так как любому слову могло придаваться числовое значение, а следовательно, в отношениях между числами усматривать «таинственные» связи между словами и выраженными ими понятиями. Примером подобной числовой мистики является гаданье Пьера Безухова о своей судьбе при помощи «числовых значений» букв слов L'Russe Besuhof (русский Безухов). В первом слове, вопреки правилам французской грамматики, Пьер откинул «е», и тогда получилось в сумме то же «звериное число» 666, которое дают слова L'empereur Napoléon (император Наполеон), откуда он заключил, что ему, Пьеру, предвечно определено принять участие «в великом деле положения предела власти зверю, глаголящему велика и хульна», в событии, якобы предсказанном Апокалипсисом (см. [87], стр. 79).

Вместе с тем, алфавитный способ нумерации создал основание для возникновения мнемоники — учения об искусственных приемах для запоминания, которое сохранилось в несколько другом виде и до наших дней. Так, чтобы запомнить знаки числа π, в дореволюционной России гимназисты заучивали двустишие «Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать, число ужъ знаетъ». Здесь не пользуются количественным значением каждой отдельной буквы, а количество букв каждого слова (вместе с твердым знаком) соответствует цифре числа $\pi = 3{,}1415926536$.

Сохранившиеся сочинения не дают ясного представления о том, каким именно способом греки производили деление. Вероятнее всего, он был, особенно в более позднее время, сходен со способом, применяемым нами. В случае, когда деление давало остаток, ограничивались либо приближением, либо применяли дроби. Для последних у греков имелось три способа выражения.

Во-первых, пользовались уже известными нам «египетскими» единичными дробями. Каждой аликвотной дроби $\frac{1}{n}$ соответствовала ее «дополнительная дробь» $\frac{n-1}{n}$, вместе с которой она составляет единицу. Аликвотные дроби долгое время записывались словами и лишь сравнительно поздно символами, например, $\frac{1}{3}=\gamma^{o\nu}$, или $\overline{\gamma}'$, или γ'', или же γ^{χ}. Для $\frac{1}{2}$ чаще всего употреблялся особый знак.

Во-вторых, применялись общие дроби, в нашем написании $\frac{m}{n}$, которые рассматривались как m-кратные аликвотной дроби $\frac{1}{n}$ и как деление $m:n$. Обозначались общие дроби по-разному, а в наиболее совершенном виде так, что знаменатель записывался над числителем, например $\overset{\theta}{\xi\varepsilon}$ означало $\frac{65}{9}$. Таким образом, здесь был сделан важный шаг к современному обозначению дробей, которое, по-видимому, возникло у древних индийцев. Для дроби $\frac{2}{3}$, которая занимала и у египтян особое положение, имелись различные специальные обозначения.

При вычислениях с дробями греки пользовались их превращением в одноименные, сокращением и «расширением», т. е. умножением числителя и знаменателя на дополнительные множители. Для облегчения сложения и вычитания единичных дробей имелись особые вспомогательные таблицы. Из сохранившихся довольно многочисленных таблиц, относящихся к разному времени, ясно видны следы египетской традиции.

Наряду с дробями греки, как мы уже отмечали, рассматривали отношения («логой»), понимаемые как отношения отрезков. Они делили их на десять видов, как-то: «кратные» $n:1$, например $4:1$; «подкратные» $1:n$, например $1:4$; «сверхчастные» $(n+1):n$, $4:3$ и др.

Милетская школа. Зарождение греческой математики связывается с легендарной фигурой Фалеса (около 600 г. до н. э.), основателя в Греции самой ранней философской стихийно-материалистической школы. Философия милетской, равно как и основанной Гераклитом (около 530—470 гг. до н. э.) эфесской школы, была направлена против идеалистической и метафизической идеологии родовой аристократии. По утверждениям Геродота, Демокрита и Платона (см. [88], стр. 7), Фалес был финикийского происхождения. Он был купцом в Милете, центре заморской торговли на Йонийском побережье. Отсюда в первой половине VI в. до н. э. Фалес отправился в путешествие, посетил Египет, где и познакомился с математикой.

Сочетание зачатков естествознания и философии с разрешением практических задач привело к попыткам монистического объяснения мира. Фалес пытался объяснить многообразие природы из единого начала, отыскать в кажущемся хаосе явлений закономерность. Это начало Фалес мог найти в мифологии древней эгейской островной культуры, Египта и особенно Месопотамии. Исключительное значение, которое здесь для хозяйственной жизни имели море или реки, способствовало созданию легенд о сотворении мира из воды. Поэтому Фалес принял за первооснову всего сущего воду. Но, в отличие от религиозных верований, учение Фалеса не считало мир сотворенным богами, а вечным, и вечно закономерно изменяющимся. «Таким образом, здесь перед нами уже полностью вырисовывается первоначальный стихийный материализм, который на первой стадии своего развития весьма естественно считает само собою разумеющимся единство в бесконечном многообразии явлений природы и ищет его в чем-то определенно-телесном, в чем-то особенном, как Фалес в воде» (см. [3], стр. 147). Пытаясь дать разумные, логические объяснения явлений, Фалес начал подходить и к математическим положениям с требованием: не только высказать, но и доказать их. Ему приписывают доказательство следующих теорем: 1) о делении круга пополам его диаметром; 2) о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; 3) о равенстве вертикальных углов; 4) о равенстве треугольников по стороне и прилегающим к ней углам (так называемый второй признак равенства треугольников), 5) о том, что угол, вписанный в полукруг, — прямой. Возможно, что Фалес «доказывал» свои теоремы о равенстве полукругов, углов или остальных трех элементов треугольника путем наложения, осуществляемого в первых трех теоремах простым перегибанием чертежа, к чему в пятой теореме добавляется еще поворот чертежа вокруг центра окружности на 180°.

Обобщая знания египтян и вавилонян, милетская школа стремилась найти ответ на вопрос об основе бытия, и в соответствии с возрастанием логического элемента в общественном мышлении искала и обоснования отдельных положений геометрии. И если египетская геометрия оставалась в основном геометрией площадей, сохраняя в этом прямую связь со своим происхождением из землемерия, теперь она стала более абстрактной. Еще в большей мере, чем у египтян, пользовались чертежом; прямые линии рассматривались не только как границы земельных участков, на чертеже изучались свойства треугольников, углов, круга, важную роль стало играть понятие подобия.

Так же как на родине учителей греков — египтян и вавилонян — изучение математики было и в Элладе тесно связано с потребностями практики. К VII и VI вв. до н. э. относится строительство громадных храмов Аполлона в Милете, Геры на острове Самос и Артемиды в Эфесе. Эти храмы строились десятилетиями, требовали точных расчетов и планов, а также применения простейших механизмов. Математические знания нужны были и для развивающегося судостроения и мореходства.

Мы не станем воспроизводить различные предания, приписывающие Фалесу те или другие астрономические знания. Отметим лишь, что Фалесу приписывается первое применение циркуля и угломера, измерение высоты пирамиды (или — обелиска?) по длине ее тени и своей собственной, а также способ определения расстояния корабля от берега. Первая из этих задач, по-видимому, решалась так: из башни или со скалы на берегу простейшим инструментом был измерен угол между отвесом и направлением луча к кораблю. Затем обстановка была воспроизведена на чертеже в уменьшенном масштабе. Наконец, измеренное на чертеже расстояние умножалось на соответствующий коэффициент. Решение основывалось на понятии подобия треугольников, пропорциональности сторон, лежащих против равных углов. Аналогично решалась и вторая задача.

Милетская школа насчитывала целый ряд философов-математиков, однако о научной деятельности большинства из них сохранилось крайне мало сведений. Видным продолжателем идей Фалеса был его соотечественник, родственник и ученик Анаксимандр (около 610—543 гг. до н. э.), автор сочинения «О природе». Анаксимандр считал основой всего существующего «беспредельное» — «апейрон» — бескачественную, неограниченную ни в пространстве, ни во времени материю, вечно изменяющуюся, движущуюся, выделяющую противоположности и вновь поглощающую их. Впервые высказав догадку о бесконечности миров в бесконечной вселенной и о естественном происхождении человека, он тем самым выдвигал на первый план идею объективной закономерности, идею, давшую значительный стимул для развития науки о количественных отношениях и пространственных формах действительности.

Анаксимандру приписывают: определение эклиптики; представление о Земле как о круговом цилиндре, диаметр которого относится к высоте как 3 : 1; построение первых географических карт Греции и Земли в целом, причем в них в первый раз была применена прямоугольная проекция; изготовление солнечных часов и других астрономических приборов. Считают также, что Анаксимандр был автором сочинения по элементарной геометрии.

К милетской школе примыкал также Лас из Гермиона. Лас написал около 500 г. до н. э. сочинение по музыке, первый греческий труд этого рода. Он производил акустические опыты. Из нескольких одинаковых сосудов один оставался пустым, другой наполнялся жидкостью до половины и т. д. Ударяя по каждому из сосудов, устанавливали, что отношение пустых пространств выражается «для октавы как 2 : 1, для квинты 3 : 2, для кварты 4 : 3». Философы пифагорейской школы использовали этот опыт для своего мистического учения о «гармонии чисел», приписав его Пифагору. Но, как указал Таннери [89], эксперименты Ласа уточняли лишь факты, несомненно, давно известные мастерам лир и флейт. Таким образом, уже тогда идеалистическая философия паразитировала на достижениях естествознания и математики — явление, характерное для нее на протяжении всей истории и особенно ярко сказывающееся в наши дни.

Пифагорейская школа. В конце VI в. до н. э. вследствие греко-персидских войн культурные центры Греции переместились с востока на запад, в ее южно-итальянские колонии. В этой земледельческой, отсталой по сравнению с Ионией стране возникли идеалистические школы пифагорейцев и элеатов. Их борьба против материализма и диалектики милетской и эфесской школы была отражением острой политической борьбы между реакционной земледельческой аристократией и демосом, которая бушевала тогда во всех полисах южной Италии.

Основатель названной по его имени школы, легендарный Пифагор (около 570—500 гг. до н. э.), был, по преданиям, уроженцем острова Самос. Организованный им союз был не только философской школой, но и политической партией и религиозным братством, ожесточенно боровшимся против демоса. После победы последнего Пифагор будто бы бежал в Кротон (в южной Италии), а затем в Месапонт, где он и умер. Философия пифагорейцев стремилась обосновать вечный и неизменный мировой порядок, а вместе с ним и власть аристократии и слепое повиновение ей демоса. Основу этого порядка она искала в числах. Свой религиозный культ пифагорейцы переняли у египетских и вавилонских жрецов вместе со знаниями арифметики, геометрии, теории музыки и астрономии, которые они развивали дальше.

Пифагорейская философия исходила из критики наивного материалистического монизма милетской школы, утверждая, что «беспредельное» Анаксимандра нуждается в определении так же, как и «предел» нуждается в том, что им определяется. В основе вещей они усматривали согласованность двух начал, гармонию противоположностей «беспредельного» и «предела», воплощаемую в таинственных «законах чисел». Аристотель излагает самый процесс фетишизации чисел пифагорейцами так: «Так называемые пифагорейцы, занявшись математическими науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их начала началами всех вещей» ([77], стр. 26—27) 985в).

Конечно, само по себе занятие математикой не приводит к фетишизации математики. Однако у пифагорейцев, само положение которых как партии реакционной аристократии неизбежно толкало их на отрыв абстрактного от конкретного, математика превращалась из науки в тайное учение секты избранников. Наименее доступны пониманию широких кругов были именно числа, эти наиболее абстрактные элементы науки того времени. Их пифагорейцы противопоставляли чувственным вещам, приписывая числам самостоятельное существование. Наличие товарного производства, в простой форме стоимости существовавшее у греков уже в эпоху Гомера, а с VI в. до н. э. и в денежной форме, создало условия, делающие возможным эту фетишизацию математики, так же как и всех взаимоотношений людей и их идеологии ([1], стр. 31—32).

Но некоторые буржуазные историки и философы, например Э. Франк [90], выставляют в качестве причины, породившей числовую мистику пифагорейцев, их занятие музыкой. Числовые закономерности музыкальных созвучий, выведенные умозрительным путем, и лишь слегка опирающиеся на эмпирически установленные факты, якобы возводились пифагорейцами в абсолютную числовую гармонию всего сущего. Верно, что пифагорейцы могли использовать изучение акустических основ музыки для того, чтобы придать своей идеалистической философии наукообразный вид. И тем не менее их числовой мистицизм имел не естественнонаучное, а социально-политическое происхождение.

Ряд отдельных элементов пифагореизма приписывался Пифагору его последователями только для того, чтобы придать своему учению больший авторитет. Но из этого не следует, что математическое и естественнонаучное учение пифагореизма является целиком плодом позднейших веков. Единство основных идей всех пифагорейских учений ясно указывает на единый мистико-религиозный источник их происхождения, на их подчинение единой политической цели, на их восхождение к эпохе распада родового строя, к эпохе Пифагора.

Для пифагореизма положение «вещи суть числа» выражает самую сущность вещей. Частями беспредельного, единицами, являются не материальные атомы, а геометрические точки. При этом пифагорейское объяснение всего существующего законами целых чисел находится в логическом противоречии с тем, что сами же пифагорейцы открыли существование несоизмеримых отрезков. Возможно, что сначала пифагорейцы не заметили разрушительного последствия этого революционного открытия для их собственной философии природы. Но затем они тщательно скрывали его. До нас дошла легенда о наказании богами пифагорейца Гиппаса Месапонтского (VI—V вв. до н. э.), постигшем его за то, что «он открыл недостойным участия в учениях природу пропорции и несоизмеримости». Это противоречие пытались затем разрешить, допустив существование актуально бесконечно малой (т. е. далее неделимой и меньшей, чем любая конечная величина) общей меры стороны и диагонали квадрата. Позднее это же противоречие разрешали тем, что выражали отношение этих длин с помощью процесса бесконечного приближения.

Основная идея пифагорейской космогонии — круговое вращение всех небесных тел, размещенных на 10 сферах, и периодичность астрономических явлений, повторяющихся с математической точностью через промежуток «мирового года», о продолжительности которого различные авторы высказывают разные предположения. Чтобы достичь требуемой числовой мистикой священной «десятки», пифагорейцы, кроме сферы неподвижных звезд, далее сфер Сатурна, Юпитера, Марса, Меркурия, Венеры, Солнца, Луны и Земли, придумали еще сферу «противо-Земли», которая вместе с остальными вращается вокруг «центрального огня». Гармонию этих сфер Аристотель описывает так: «Эти десять сфер издают, как всё движущееся, шум, но каждая сфера особого типа, соответственно особенности своей величины и скорости... Последняя определяется различными расстояниями, находящимися в гармоническом отношении друг к другу, соответственно музыкальным интервалам; вследствие этого возникает гармонический голос (музыка) движущихся сфер (мира)» ([91], 293a, 290*b*).

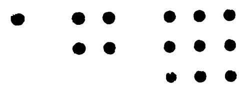
Таким образом, пифагорейская космогония была связана с их теорией музыки. Ее основными положениями были два закона: во-первых, закон пропорциональности высоты тона длине звучащей струны или столба воздуха, например, при игре на флейте. Во-вторых, закон созвучий, согласно которому созвучия достигаются лишь тогда, когда длины струн или высоты столбов находятся в определенной целочисленной пропорции. Этим законам, найденным эмпирически, позднее было дано объяснение, вероятно, Архитом Тарентским (около 428—365 гг. до н. э.), на котором сказалось влияние материалистической атомистики Демокрита. Объяснение рассматривает тона как субъективные отражения объективных движений тел, и высоту тонов как зависящую от частоты движений. Евклид, излагая это объяснение в своих «Канонах», заключает, что «тона сложены из частиц, так как они путем прибавления и отнятия достигают правильной меры. Однако все, что сложено из частиц, относится друг к другу как целые числа, значит, и тона должны необходимо относиться как целые числа».

Но доведенная до логического конца математическая теория созвучий наводила на мысль о существовании несоизмеримостей, и, значит, опровергала свою собственную основу — возможность целочисленного измерения всех вещей. Интервал между полными тонами не постоянен, а обратно пропорционален высоте тона. Поэтому деление полного интервала должно происходить по «гармоническому принципу», т. е. так, чтобы октава (длина струн относится как $1:2$) делилась бы на два неравных интервала — кварту $(3:4)$ и квинту $(2:3)$ — по закону $^1/_2 = {^3/_4} \times {^2/_3}$. Деление же октавы на два равных интервала $\frac{x}{y}$ дало бы по этому же закону $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \times \frac{x}{y}$, а следовательно, $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$. Но при соотношении длин струн $1:\sqrt{2}$ получается не созвучие, а шум. Отсюда напрашивается мысль, что $\sqrt{2}$ не может быть выражен отношением двух целых чисел.

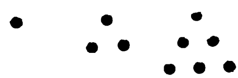
Естественнонаучные идеи пифагорейцев подвергались критике «слева» и «справа» уже в самой древности. Так, материалист и диалектик Гераклит Эфесский (около 530—470 гг. до н. э.) упрекал Пифагора за эклектизм и мистицизм. Между тем воинствующий идеалист Платон (429—348 гг. до н. э.) порицал пифагорейцев за то, что они «измеряют и сравнивают эмпирические звуки так, как мы их действительно слышим, и исследуют числа, на которых основано их созвучие, вместо того чтобы исследовать, какие числа сами по себе созвучны и какие нет, и почему бы такое».

Математика и нумерология пифагорейцев. Из-за отсутствия документального материала нет возможности установить последовательные этапы дальнейшей двухвековой разработки пифагорейцами математических знаний, первоначально перенятых ими у египтян и вавилонян.

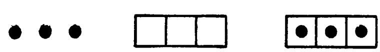
Пифагорейцы изображали числа в виде точек, группируемых в геометрические фигуры. Так возникло понятие «фигурных чисел», в котором нашла свое отражение тесная связь, существующая между понятиями числа и пространственной протяженностью. Например, «квадратные числа» 1, 4, 9 изображались так:



«Треугольные числа» 1, 3, 6 представлялись в таком виде:



У пифагорейцев точка, изображавшая единицу, была дальше неделима — она была математическим атомом; сама точка определялась как единица, обладающая положением. Для того чтобы быть отличимыми друг от друга, единицы-точки должны были отделяться пространством, каждая точка должна была иметь вокруг себя «поле». Благодаря этому каждое число можно было изображать не только при помощи точек, но и квадратных полей, или тех и других, как например, число 3 в виде



Таким образом, в основе здесь лежит понятие числа, которое лишь изображается фигурой: геометрия подчинена арифметике.

Фигурные числа отражали своим видом способ, которым они были арифметически порождены, т. е. были ли они получены путем сложения или умножения. Пифагорейцы и продолжатели их традиций рассматривали преимущественно числа-суммы, между тем Евклид и его школа допускали геометрические изображения лишь для чисел-произведений.

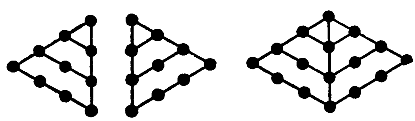
Простейший и древнейший пример арифметического понятия (изображаемого единицами-точками) — это различение четного (парного) и нечетного (непарного). Противоположность нечетного и четного представляет одну из десяти пар противоположностей, считавшихся пифагорейцами философскими категориями.

Числа-произведения делились пифагорейцами на «прямолинейные», т. е. простые числа, которые, так как они не разлагаются на множители, изображались точками, расположенными вдоль отрезка; «плоскостные числа», разлагающиеся на два множителя и изображающиеся точками, образующими прямоугольник или квадрат, и «телесные числа», разлагающиеся на три множителя и изображающиеся точками, образующими параллелепипед или куб.

Среди чисел-сумм пифагорейцы выделяли «многоугольные числа». Наиболее простыми из них были «треугольные»:

$$1, \quad 1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \ldots$$

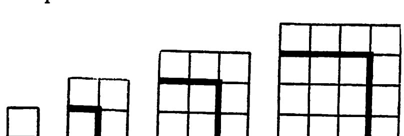
Из треугольных чисел пифагорейцы получали и все квадратные числа, способом, который указан на чертеже.



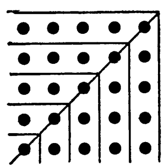
Тем же путем, присоединяя друг к другу три равных треугольных числа, получали пятиугольные числа и т. д. Александрийский математик II в. до н. э. Гипсикл показал, что n-е m-угольное число равно $\frac{1}{2}n[2+(n-1)(m-2)]$.

Далее определялись «пирамидальные числа», образуемые сложением многоугольных чисел. Простейшие из них, «четырехгранные числа», получаются из треугольных чисел $1=1$, $1+3=4$, $1+3+6=10$, $1+3+6+10=20$... и изображаются в виде пирамид с треугольным основанием. Разумеется, что все фигурные числа и их свойства не были открыты сразу, а постепенно, в течение нескольких веков.

С дальнейшим развитием математики фигурные числа потеряли значение, за одним, однако, исключением: это квадратные и кубические числа, давшие возможность подойти к вычислению площадей и объемов, т. е. к решению собственно геометрических задач. Заменяя единицы-точки полями, мы видим, что квадратные числа, рассматриваемые как числа-суммы, изображаются так:



Часть фигуры, соответствующая нечетному числу, от прибавления которого к квадратному числу получается следующее квадратное число, называлась «гномон». Обозначая первоначально «того, кто знает, различает», затем простейший астрономический инструмент — колышек, перпендикулярный к горизонтальной плоскости (циферблату солнечных часов), образующий прямой угол со своей тенью, — слово «гномон» употреблялось позднее расширительно. Им называли такое прибавление к геометрической фигуре, которое увеличивает, но не меняет ее (например, гномоном треугольника может оказаться трапеция). Между тем пифагорейцы, исходя из квадрата, отождествляли «гномон» с прямоугольной и обязательно нечетной фигурой. Рассматривая последовательность гномонов,



пифагорейцы извлекали отсюда ряд свойств чисел, например, сумма двух последовательных нечетных чисел равна учетверенному соответствующему (натуральному) числу $1+3=4\times 1$, $3+5=4\times 2$, $5+7=4\times 3$ и др. В то время как мы легко доказываем эти и подобные свойства, например последнее, при помощи простых алгебраических преобразований $(2n-1)+(2n+1)=4n$, пифагорейцы лишь проверяли их при помощи наглядной фигуры.

Другим способом наглядного изображения квадратных чисел в виде сумм у пифагорейцев был «стадион». Например, чтобы получить 5^2 в виде суммы, записывали числа от 1 до 5. а отсюда обратно до 1; таким образом, единицы стояли при входе и выходе «стадиона», а число, возведенное в квадрат, на повороте:

$$\left.\begin{array}{l} 1-2-3-4 \\ 1-2-3-4 \end{array}\right\rangle 5.$$

Рассматривая фигуру «стадиона», находили целый ряд свойств чисел, в том числе приведенное выше.

Наряду с квадратными числами большое значение у пифагорейцев имели «продолговатые числа» — числа вида $n(n+1)$. Разумеется, что число, принадлежащее одной категории, могло вместе с тем принадлежать и другой. Пифагорейцы знали также «подобные числа», например, $6=2\times 3$, $24=4\times 6$, $54=6\times 9$, ..., изображаемые прямоугольниками с пропорциональными сторонами. Эти числа обладают рядом интересных свойств: например, произведение двух «подобных чисел» является «квадратным числом».

Изучение чисел-сумм, изображаемых фигурами, составленными из единиц-точек, послужило основанием для суммирования числовых рядов, которым успешно занимался Архимед. Изучение «прямолинейных чисел» дало толчок к возникновению теории простых чисел, важные результаты которой были получены Евклидом, использовавшим в теоретико-числовых книгах своих «Начал» многие понятия, введенные пифагорейцами.

Различая, кроме простых чисел, составные и взаимно простые (первые между собой, т. е. не имеющие общего делителя, например, 14 и 55), пифагорейцы, и, с некоторыми отклонениями, греческие математики, вообще уделяли также много внимания дальнейшей классификации четных и нечетных чисел, различая (как позже Евклид) четно-четные, четно-нечетные, нечетно-нечетные и т. п. числа. При этом соблюдавшие пифагорейскую традицию не включали в нечетные числа, да и в числа вообще, 1, а в четные — 2, считая их «началами» чисел и помещая вне ряда чисел.

Пифагорейцы занимались также вопросом об отношении чисел к сумме своих делителей. Под делителями числа понимались все его делители, простые и составные, включая 1, но исключая само число. Если сумма делителей оказывалась больше самого данного числа, то число называли «сверхсовершенным», если она была равна ему — «совершенным», а если меньше его — «недостающим»:

Совершенными числами много занимались в Средние века; позднее Ферма и Декарт показали их связь с другими вопросами теории чисел.

Наконец, пифагорейцами рассматривались «дружественные числа», т. е. такие два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого. Неоплатоник сириец Ямблих (около 250—325 гг. н. э.) приписывает Пифагору открытие дружественных чисел 220 и 284, единственной пары, известной в древности. В Средние века считали, что талисманы с дружественными числами способны укрепить близость между людьми. Арабский математик Сабит ибн Корра (826—901 гг.) нашел правило образования дружественных чисел, которое было забыто и вновь открыто Ферма и опубликовано (без доказательства) Декартом (1638 г.).

Средние, пропорции и прогрессии. С логической стороны рассмотрение отношения более чем двух чисел должно последовать лишь за изучением отношения двух чисел, с которым связаны понятия фигурных чисел, «логой» и т. п. Тем не менее исторически пропорции — отношения трех и четырех чисел — изучались в самой глубокой греческой древности, так как они были предметом изучения египтян, от которых и перешли к грекам, постепенно создавшим стройную теорию пропорций, нашедшую свое завершение в V, VI и VII книгах Евклида. Под пропорцией чаще всего понималась четырехчленная геометрическая пропорция, в нашей записи: $a:b = c:d$, но иногда также арифметическая: $a-b=c-d$. Что же касается средних, то они состоят из трех членов $a>b>c$, между которыми можно установить девять отношений, а также девять отношений между разностями $a-b$, $b-c$, $a-c$. Приравнивая между собой эти отношения и отбрасывая неподходящие, мы получим 11 видов средних; все эти средние были известны древним грекам.

Традиция приписывает времени Пифагора знание трех средних, называемых «древними»: арифметическое среднее $(a-b):(b-c)=a:a$, геометрическое $(a-b):(b-c) = a:b$ и гармоническое $(a-b):(b-c)=a:c$.

Об арифметической средней $(a-b):(b-c)=a:a$ было известно уже пифагорейцу Архиту Тарентскому. Кроме первоначального вида геометрического среднего $(a-b):(b-c) = a:b$, уже Архит приводит вытекающий отсюда другой его вид: $a:b=b:c$.

Платон (429—348 гг. до н. э.) прибегал к геометрическим средним для пояснения физического строения мира, между тем как арифметическое и гармоническое среднее он использовал для определения «мировой души».

Гармоническое среднее $(a-b):(b-c)=a:c$ определялось Архитом и Платоном еще и так: если $a>b>c$, то b является средним гармоническим при условии, что $a=b+\frac{a}{n}$ и $b=c+\frac{c}{n}$ (где $n>1$); отсюда следует, что $\frac{1}{c}-\frac{1}{b} = \frac{1}{b}-\frac{1}{a}$; таковы, например, числа 6, 4, 3, так как $\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-\frac{1}{6}$. Гармоническое среднее связывалось с законами музыкальных созвучий, а также с тем, что куб имеет 12 ребер, 8 вершин и 6 граней, где 8 — гармоническое среднее чисел 12 и 6.

Сочетая среднее арифметическое и среднее гармоническое, пифагорейцы получали «музыкальную» пропорцию, которую согласно легенде Пифагор позаимствовал из Вавилона. Если 12 и 6 крайние члены, находящиеся в отношении 2:1 длин струн октавы, то среднее арифметическое 9 образует кварту (отношение 4 : 3), а среднее гармоническое 8 квинту (отношение 3 : 2); вся пропорция имеет вид 12, 9, 8, 6.

«Теорема Пифагора» и несоизмеримые величины. Пифагорейское учение, считавшее, что целые числа являются мерой всех вещей, натолкнулось на непреодолимое противоречие благодаря открытию иррациональности. Но именно это открытие представляет самый большой вклад пифагореизма в математику. По-гречески иррациональность выражается тремя терминами: «асимметрон», что значит не имеющий общей меры, «арретон» — т. е. невыразимое (целыми числами), впервые встречающееся у Платона, и «алогон», что означает не выражающееся «логосом», т. е. отношением двух целых чисел. Латинское название «иррациональность» является буквальным переводом слова «алогон», так как «рацио» означает «отношение». Таким образом, как видно из самих названий, пифагорейцы под иррациональными величинами понимали прежде всего прямолинейные отрезки, не имеющие общей меры, и поэтому невыразимые отношением целых чисел. Следовательно, говорить об иррациональности какой-либо величины безотносительно к другой не имело смысла.

Вероятно, что открытие иррациональности было связано с так называемой теоремой Пифагора. Как мы уже знаем, эта теорема задолго до Пифагора была известна вавилонянам, а возможно, и египтянам. Однако древние историки Плутарх, Диоген Лаэрций и Прокл приписывают это открытие Пифагору, повторяя легенду, будто Пифагор в благодарность за него принес богам в жертву сто быков («гекатомбу»). Возможно, что Пифагор или его ученики, зная отдельные «священные треугольники» (т. е. прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами) египтян и вавилонян, для которых теорема проверяется легко, просто обобщили эту теорему на все прямоугольные треугольники, хотя и без достаточного на это основания. Сами «священные треугольники» могли быть найдены из рассмотрения таблиц квадратов, которыми пользовались вавилоняне. Числа x, y, z, выражающие стороны таких треугольников, называли «пифагорейскими числами». Пифагорейцам приписывается правило получения взаимно простых пифагорейских чисел

$$x = 2p + 1, \quad y = 2p^2 + 2p, \quad z = 2p^2 + 2p + 1,$$

дающее тройку таких чисел для любого натурального p, причем здесь y и z — два соседних целых числа.

О том, как первоначально доказывалась теорема Пифагора, можно строить только гипотезы. Возможно, что сначала она была доказана лишь для равнобедренного прямоугольного треугольника, встречающегося издавна в орнаментах, выглядевших как сеть квадратов и их диагоналей. Здесь наглядно видно, что сумма квадратов $ABED$ и $EFJH$, построенных на катетах треугольника DEH, равна квадрату $DBFH$, построенному на его гипотенузе, так как все эти квадраты распадаются на равные треугольники (рис. 4). От этого частного случая переход к общему мог произойти путем рассмотрения квадрата $ABCD$, разделенного на два неравных квадрата $AHJE$ и $JFCG$ и два равных прямоугольника $EJGD$

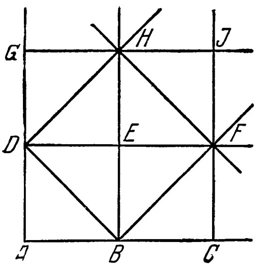


Рис. 4.

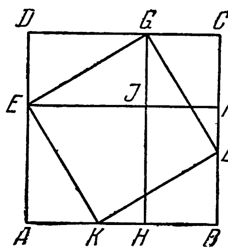


Рис. 5.

и $HBFJ$ (рис. 5). Квадрат $EKLG$ равен квадрату $ABCD$, уменьшенному на треугольники AKE, KBL, LCG и GED, которые в своей сумме равны обоим прямоугольникам. В то же время и сумма квадратов $AHJE$ и $JFCG$ равна квадрату $ABCD$, уменьшенному на эти два прямоугольника, откуда следует, что квадрат $KLGE$ равен сумме квадратов $AHJE$ и $JFCG$. Это доказательство, так же как и доказательство Евклида, не пользуется понятием подобия. Но, прибегая к последнему понятию, небезызвестному египтянам и вавилонянам, которым, как мы видели, успешно пользовался еще Фалес, можно было доказать эту теорему гораздо проще.

«Теорема Пифагора» приводила к задаче вычисления величины гипотенузы по заданным величинам обоих катетов. А эта задача, уже в простейшем случае $a = b = 1$, не решалась; не удавались попытки найти отношение двух целых чисел $\frac{m}{n}$ так, чтобы оно было равно $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, или, иначе говоря, не удавалось найти общую меру стороны и диагонали квадрата, хотя, надо полагать, делали такие попытки долго, все больше уменьшая единицу измерения. Невозможность прийти этим путем к цели должна была поражать и смущать: несоизмеримые стали восприниматься как «уму непостижимые», сам термин «алогон», «иррациональный» приобрел этот второй смысл. Не исключено также, что на иррациональность $\sqrt{2}$ натолкнула теория музыки, поиски полуоктавы, что равносильно нахождению геометрического среднего числа 1 и 2.

Невозможность выразить $\sqrt{2}$ соотношением двух целых чисел привела не только к поискам его приближенного вычисления, но и к доказательствам этой невозможности. Одно из доказательств, встречающееся в некоторых списках «Начал» Евклида ([92], т. 2, стр. 503—505), является доказательством от противного. Оно сводится к следующему рассуждению. Пусть сторона квадрата равна a, его диагональ равна b, причем числа a и b мы избрали так, что они не имеют общего делителя (кроме 1). Тогда, по теореме Пифагора, должно быть $b^2 = 2a^2$. Так как правая сторона делится на 2, то и левая должна делиться на 2, а следовательно, число b должно быть четным, а так как a и b не имеют общего делителя, то a должно быть нечетным. Но если b — четное, то его квадрат делится на 4, а значит, и правая сторона равенства должна делиться на 4, что возможно, если только a — четное. Так мы пришли к абсурдному выводу, что число a должно быть одновременно нечетным и четным, откуда следует, что чисел, удовлетворяющих данному равенству, не существует. Итак, $\sqrt{2}$ не может быть представлен как число, т. е. как делали пифагорейцы с помощью точек, но он может быть представлен при помощи длины отрезка.

Другой способ доказательства иррациональности $\sqrt{2}$ построен на методе приближенного вычисления этого корня. Чтобы найти квадратный корень числа, не являющегося полным квадратом, Архит разлагает его на два неравных множителя (например, $2=1\times2$), находит среднее арифметическое и среднее гармоническое обоих (в данном случае $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$) и образует из этих четырех чисел «музыкальную пропорцию» $\left(2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}:1\right)$. Здесь произведение средних членов равно данному числу (2) и вместе с тем разность $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$ меньше, чем разность $2-1=1$. Следовательно, $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$ можно рассматривать как приближенные значения $\sqrt{2}$, первое с избытком, второе — с недостатком, и продолжать тот же прием. Как вторые приближения, мы получим $\frac{17}{12}$ и $\frac{24}{17}$, отличающиеся друг от друга лишь на $\frac{1}{204}$ и т. д.

Открытие факта, что между стороной и диагональю квадрата, двумя отрезками, чьи относительные величины нам столь привычны, не существует общей меры, пусть и сколь угодно малой, вызвало подлинный кризис основ греческой математики. Пифагорейское учение о целочисленной основе всего существующего, в том числе и геометрических величин, больше нельзя было признавать истинным; начались поиски нового обоснования. Но значение открытия иррациональности далеко не всеми было оценено правильно. Так, Аристотель ([77], стр. 22 (982в—983а) указывает, что оно вызвало удивление, которое вызывает всякое подлинно научное открытие. Некоторые историки математики — идеалисты усматривают в факте несоизмеримости «признак смущающей антиномии между мыслью и ощущением, пропасть, через которую ни вычисление, ни логика не в состоянии перекинуть мост» ([93], стр. 522). Другие же, например, Абель Рей ([94], стр. 326—327), утверждают, что иррациональность $\sqrt{2}$ долгое время представлялась как «скандальное исключение», что ее скрывали, сопротивлялись распространению знаний о несоизмеримых. При этом ссылаются не только на пифагорейскую легенду о гибели во время кораблекрушения Гиппаса Месапонтского, выдавшего тайну открытия несоизмеримости, но и на то, что даже после этого открытия долгое время разрабатывалась арифметика, признающая исключительно лишь целые числа. Между тем в несоизмеримости, в противоположности непрерывной величины, познаваемой рационально, и дискретного числа, познаваемого чувственно-наглядно, нашла свое выражение диалектика материального мира, времени и пространства и его познания, суть которой, как указал Ленин ([8], стр. 241—243), состоит в том, что изображение как мыслью, так и ощущением движения и всякого понятия всегда есть огрубление, омертвление живого. Но метафизический образ мышления не давал древним математикам, как не дает и многим современным буржуазным историкам математики, математикам и философам, возможность понять это.

Апории Зенона. Наиболее резкое выражение метафизическая точка зрения нашла в школе элеатов, идеологов рабовладельческой аристократии, завзятых противников диалектики, отстаивающих учение о едином, нераздельном и неизменном бытии против зародышей диалектики, содержавшихся даже у пифагорейцев, а тем более у древних материалистов. Зенон (около 450 г. до н. э.), ученик главы элейской школы Парменида, выдвинул ряд «доказательств» этого учения, среди которых четыре знаменитые «апории движения». Они следующие:

1. Дихотомия. «Нет движения, потому что то, что движется, должно дойти до середины раньше, чем оно дойдет до конца».

2. Ахиллес. «Медленный в беге никогда не будет перегнан быстрым потому, что тот, кто преследует, должен сначала достичь точки, из которой начал убегающий, так что медленный всегда неизбежно будет на некотором расстоянии впереди».

3. Стрела. «Если все либо покоится, либо движется, занимая пространство, равное ему самому, то, так как движущийся предмет всегда существует в мгновении, движущаяся стрела неподвижна».

4. Стадион. «Если имеются два ряда тел, каждый состоящий из равного числа тел равного объема, которые проходят друг мимо друга по беговой дорожке, двигаясь с равной скоростью в противоположных направлениях, один ряд начиная с конца стадиона, а другой — с его середины, то это приводит к заключению, что половина данного времени равна удвоенному этому времени».

Приведенные здесь в передаче Аристотеля ([95], стр. 143—144 (239в)) апории считались последним логическими ошибками, и как софизмы рассматривались традиционной формальной логикой. Между тем, как отметил Ленин ([8], стр. 240), философское значение апорий Зенона состояло в том, что они вскрыли действительную противоречивость движения, пространства, времени, которую, однако, Зенон не сумел выразить в логике понятий. В то время как первая пара апорий исходит из допущения о неограниченной делимости непрерывных величин и опровергает его, во второй делается противоположное допущение о непрерывных величинах, построенных из неделимых элементов, которое также отвергается. Эти допущения соответствовали двум противоположным взглядам на пространство, имевшимся у греков: атомистического, сводившего пространство к отдельным точкам (как это имело место у пифагорейцев), и допускающего неограниченную делимость пространства, исключающую мысль, что пространство состоит из точек (этого взгляда придерживался Аристотель). При этом вторая апория отличается от первой лишь тем, что в ней движутся два тела, а не одно, т. е. что «доказывается» невозможность не только абсолютного, но и относительного движения, а также не только невозможность того, чтобы движение началось, но и чтобы уже начавшееся движение продолжалось. Таково же и отношение между четвертой и третьей апориями.

Для того чтобы понять математическое значение апорий Зенона, достаточно разобрать одну из них, например первую. Здесь точка, движущаяся из A в B, должна пройти сначала через точку C, делящую отрезок AB пополам, затем через точку D, делящую пополам BC и т. д. Если положим $AB=1$, то имеем $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$, но эта сумма равна $1-\frac{1}{2^n}$ и с возрастанием n она сколь угодно приближается к 1. Однако Зенон полагал, что отрезок всегда больше точки — песчинки, обладающей конечными минимальными размерами. В таком случае сумма бесконечного числа таких отрезков будет бесконечной, а значит, рассуждение Зенона действительно показывает абсурдность этого допущения. Таким образом, апория, — кажущееся непреодолимым логическое затруднение,— состоит здесь в том, что сумма *бесконечного* множества слагаемых *конечна,* и в ее основе лежит отказ Зенона от представления о бесконечной делимости материи. Возражения Аристотеля, которые, по существу, повторяет и Лейбниц, против «дихотомии» Зенона, бьют мимо цели, так как они указывают лишь, что не только пространство, но и время неограниченно делимо. Но установив, что отрезок AB будет пройден в $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ единиц времени, мы отнюдь не решим проблему, состоящую в том, чтобы показать, почему ряд делений, по определению неисчерпаемый, может быть исчерпан. Это становится понятным лишь тогда, когда мы примем во внимание, чтó и каким образом сами эти деления неограниченно убывают. Все рассуждение Зенона связано с нахождением суммы бесконечной геометрической прогрессии, а следовательно, вместе с Цейтеном ([12], стр. 56) приходится предположить, что в середине V в. до н. э. либо Зенон, либо его противники занимались ее суммированием. Никак нельзя согласиться с оценкой роли Зенона, данной ван дер Варденом [96]. который изображает его как диалектика, якобы не выступавшего ни против числового атомизма пифагорейцев, ни против идей бесконечно малого, которые будто бы тогда еще не встречались в греческой математике.

Демокрит. Справедливо, с формально-логической точки зрения, отвергая пользование бесконечностью, пока ей не дано более содержательного определения, чем то, что она не может быть достигнута, Зенон положил начало той линии развития греческой математики, которая стремилась избежать действия с бесконечными совокупностями и бесконечно малыми величинами. Однако эта линия не восторжествовала сразу, ей приходилось прокладывать себе дорогу в борьбе против школы греческих материалистов-атомистов, возглавлявшейся Демокритом (около 460—370 гг. до н. э.). Апории Зенона, так же как и открытие несоизмеримости, отразили объективно существующий внутренне противоречивый характер движения, пространства и времени, прерывности и непрерывности материи. Логические понятия, возникшие на основании отношений конечных совокупностей, оказались отчасти неприложимыми к бесконечным совокупностям, что и приводило к апориям, логическим и математическим парадоксам. Позднее последние рассматривали Галилей и Больцано, и они не устранены и ныне, выступая в виде логических трудностей при обосновании теории множеств, лежащей в основе современной математики.

Демокрит, выражавший идеологию торгово-промышленных слоев рабовладельческой демократии фракийского города Абдеры, был, по выражению Маркса и Энгельса, «первым энциклопедическим умом среди греков» ([4], стр. 126). Диоген Лаэрций (III в. н. э.), являвшийся одним из первых историков философии, называет 70 подлинных сочинений Демокрита по разным вопросам естествознания, математики и философии, из которых сохранились, однако, лишь отрывки. Будучи материалистом, Демокрит учил о вечности, несотворимости и неуничтожаемости материи, которую представлял как состоящую из неизменных неделимых твердых атомов, различающихся по форме и образующих, благодаря сочетаниям, отличным по положению и порядку, все бесконечное разнообразие материи. Существование наряду с материей абсолютно пустого пространства обеспечивало самодвижение атомов, представляющееся Демокриту механическим и не допускающим случайностей. Ему принадлежит первое сочинение по логике, «Каноны» в трех книгах, направленное как против скептицизма и релятивизма софистов, так и против идеализма пифагорейцев и элеатов.

Демокрит много путешествовал, побывал в Египте, Персии, Вавилоне, а возможно, и в Индии и Эфиопии, где ознакомился с состоянием научных знаний. Несмотря на то, что его разносторонние и глубокие познания завоевали ему славу в древности, его материализм вызвал яростную ненависть: Платон игнорировал Демокрита и сжигал его сочинения — отношение, которое сохранилось на протяжении тысячелетий, вплоть до нашего времени, у идеалистов-философов и историков к его трудам, что отмечено В. И. Лениным ([7], стр. 117 и 339—340). Замалчивание и третирование Демократа сказались и на отношении к его математическому наследству, о котором поэтому до нас дошли лишь скудные сведения.

Диоген Лаэрций называет шесть математических сочинений Демокрита. Первое из них называется «О различии во взглядах или о касании круга и шара» или, по другому чтению, «О различии в углах или о касании круга и шара». Далее называются «О геометрии», «Геометрическое», «Числа», «О несоизмеримых линиях» и «Экпетáсмата». В своих геометрических сочинениях, по свидетельству Аристотеля, Архимеда и других ученых древности, Демокрит исходил из того, что точки — это атомы пространства, имеющие конечный объем, и считал, что в каждом отрезке имеется конечное, хотя и «сверхчувственно большое» число точек [97]. Это представление было тесно связано с геометрическими представлениями пифагорейцев и Зенона. С помощью этого представления Демокрит находил площади и объемы многих фигур, в частности объем пирамиды. Геометрические тела Демокрит представлял себе состоящими из параллельных пластинок, толщина которых равна одному атому, чем он предвосхитил позднейший метод неделимых и «принцип Кавальери» (1635 г.), согласно которому два тела имеют равные объемы, если при пересечении их любой плоскостью, параллельной некоторой заданной плоскости, оба сечения имеют всякий раз равные площади. Демокрит, по-видимому, знал, что треугольную призму можно разложить на три пирамиды с равными основаниями и высотами, — это положение вошло в «Начала» Евклида (кн. XII, предложение 7) ([92], т. 3, стр. 76). Видимо, именно отсюда Демокрит заключил, что объем пирамиды равен трети объема призмы с тем же основанием и высотой. Строгое доказательство этой теоремы было дано Евдоксом полувеком спустя. Естественным было для Демокрита обобщение этой теоремы на пирамиды с многоугольным основанием. Так как круг рассматривался Демокритом как многоугольник, каждая сторона которого состоит из двух атомов, круговые цилиндры и конусы для Демокрита были призмами и пирамидами с очень большим числом сторон основания и из обобщения теоремы Демокрита на пирамиды с многоугольным основанием вытекало обобщение этой теоремы и на конусы.

В первом из перечисляемых Диогеном Лаэрцием математических сочинений Демокрита (при первом варианте этого названия), по-видимому, опровергалось мнение софиста Протагора, утверждавшего, что так как в природе нет идеальных прямых и кругов, с которыми имеют дело математики, то прямая соприкасается с окружностью не в одной, а во множестве точек. Согласно Демокриту прямая, касающаяся круга, имеет с ним два общих атома. При втором варианте названия трактата речь в нем могла идти о «роговидных» углах.

Как известно, угол между двумя пересекающимися кривыми измеряется углом между касательными к ним в точке их пересечения, а поэтому угол между двумя соприкасающимися кривыми равен нулю. Иначе обстоит дело с «роговидными углами».

Под «роговидным углом» понимают часть плоскости между двумя пересекающимися кривыми (или часть плоскости между двумя соприкасающимися кривыми) вблизи точки пересечения (касания) (рис. 6). Для простоты примем за одну из кривых прямую — ось X, а за другую кривую — окружность, пересекающую ось X в начале O (или касающуюся оси X в O). Из двух роговидных углов AOX и BOX будем считать меньшим тот угол, сторона A которого проходит вблизи точки O ниже стороны B другого. Очевидно, что роговидный угол любой касающейся окружности B меньше, чем роговидный угол любой окружности C, пересекающей прямую X. Определим теперь умножение роговидного угла a, образованного касающейся окружностью A радиуса R, на целое положительное число n так, что это есть роговидный угол, образованный окружностью радиуса $\frac{R}{n}$. Тогда очевидно, что каким бы большим ни было n, роговидный угол na всегда будет меньше роговидного угла TOX (он совпадает с обыкновенным углом) прямой T, касающейся окружности C. Наконец, роговидный угол COX пересекающей окружности C мы будем рассматривать как сумму роговидных углов $COT + TOX$ (рис. 7).

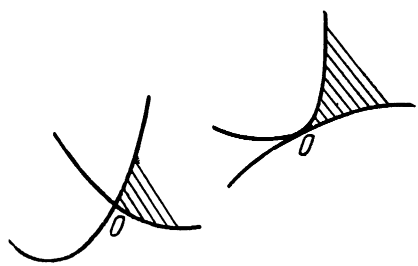


Рис. 6.

В «Началах» Евклида (кн. III, предложение 16) ([92], т. 1, стр. 97) доказывается, что «угол касания» меньше всякого прямолинейного острого угла. Хотя этот угол под названием «угол сегмента» вводится отдельным определением (кн. III, определение 7) ([92], т. 1, стр. 81) и о нем высказываются теоремы, например предложение 31 кн. III, Евклид не пользуется роговидными углами для доказательств. Между тем, из работ Аристотеля следует, что до его времени роговидные углы применялись для доказательств, например, теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

Однако в «Началах» эта теорема уже доказывается без помощи роговидных углов, они успели, из-за связанных с ними споров, выйти из употребления. Роговидные углы — это пример актуально бесконечно малых величин, не подчиняющихся так называемому постулату Евдокса — Архимеда, который гласит, что для всяких двух величин a и b можно найти такое число n, что $n \cdot a > b$.

Под «актуально бесконечно малой» величиной понималась далее неделимая постоянная величина, меньшая, чем любая конечная величина. Возможно, что интерес Демокрита к актуально бесконечно малым величинам был связан с его атомистическими представлениями, так как атомы Демокрита имели много общего с этими величинами.

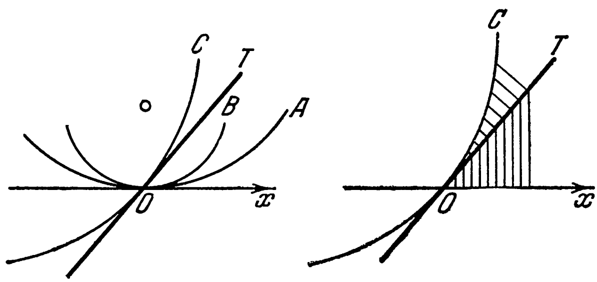


Рис. 7.

Споры о роговидных углах были возобновлены в XIII—XVI вв. и роговидные углы послужили в XVII в. прообразом неделимых для Кеплера и Кавальери.

Сочинение Демокрита «Экпета́смата» было, посвящено проекции армиллярной сферы (одного из старейших астрономических инструментов) на плоскость. По свидетельству римского архитектора и инженера Витрувия (2-я половина I в. до н. э.), Демокрит писал также по вопросам перспективы.

Исследователи обратили внимание на то, что порядок, в котором Диоген Лаэрций перечисляет математические сочинения Демокрита, соответствует порядку изложения в «Началах» Евклида — планиметрия (книги I—VI), числа (книги VII—IX), несоизмеримые (кн. X). Это указывает на то, что работы Демокрита, наряду с другими, подготовили появление «Начал». Несмотря на то, что материалистическая школа атомистов существовала до III в. до н. э., древние историки-идеалисты, например Прокл, умалчивали о ее математических достижениях.

Гиппий Элидский. Появление «Начал» подготовляли и работы софистов, философов и естественников V—IV вв. до н. э., отказывающихся от религии, ищущих рационалистического объяснения природных явлений, из которых некоторые «старшие» были материалистами, между тем как другие, особенно поздние, склонялись к философскому релятивизму, скептицизму и идеализму. К софистам принадлежал Гиппий Элидский, родившийся около 460 г. до н. э. Ему приписывается открытие особой кривой, которая впоследствии была названа квадратрисой (рис. 8). Если прямая AB движется равно-

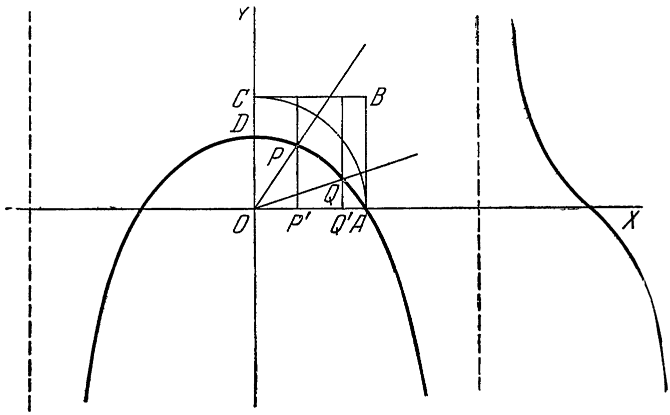


Рис. 8.

мерно, оставаясь параллельной самой себе, до положения OC, и одновременно луч OA вращается равномерно вокруг O до положения OC, то геометрическим местом точек пересечения прямой и луча будет квадратриса, точнее, ее часть, так как кривая имеет бесконечное множество ветвей. Если положим $OA = a$, то ее уравнение в прямоугольных координатах будет $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}$, откуда получаем, что $y_0 = OD = \lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi}$. Гиппий пользовался этой кривой для решения задачи деления угла на три равные части — «трисекции угла». Для того чтобы разделить $\angle POA$ на три равные части, опустим перпендикуляр PP' на OA, затем построим $AQ' = \frac{1}{3} AP'$, построим $Q'Q$ параллельно $P'P$ и до пересечения Q с квадратрисой, тогда $\angle QOA = \frac{1}{3} \angle POA$.

Вместе с задачами «квадратуры круга» и «удвоения куба» «трисекция угла» была одной из трех знаменитых проблем геометрии. Попытки точного решения этих проблем с помощью циркуля и линейки (и при соблюдении дозволенных традицией приемов обращения с этими инструментами) продолжались в течение двух тысячелетий. Поскольку Гиппий применял для решения свою кривую, это решение считалось недозволенным. Однако примерно к тому же времени относится другой способ решения, который, хотя и пользуется лишь одной линейкой, все же не соответствует единственно допускавшимся приемам, вошедшим затем в «Начала» Евклида (кн. I, постулаты 1, 2), ([92], т. 1, стр. 14). Это так называемый метод вставки. Для того чтобы разделить угол ABC на три равные части (рис. 9), проведем AC перпендикулярно BC и AE параллельно BC. Затем нанесем на линейку метки D и E так, чтобы $DE = 2AB$, и будем вращать линейку вокруг точки B, передвигая ее одновременно так долго, пока E не попадает на AE, D на AC. Сделав таким образом вставку DE, мы замечаем, что если F есть середина DE, то в прямоугольном треугольнике ADE мы имеем $DF = AF = FE$, а следовательно, и $AF = AB$; значит, ABF — равнобедренный треугольник, а поэтому $\angle ABF = \angle AFB$. Но и треугольник AEF — равнобедренный, а поэтому $\angle AEF = \angle FAE$, а следовательно, $\angle AFB = 2\angle AEF = 2\angle CBF$. Таким образом, $\angle CBF = \frac{1}{3}\angle CBA$.

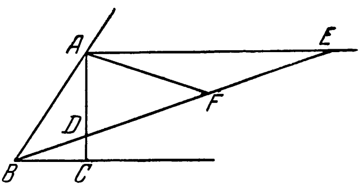


Рис. 9.

Невозможность в общем случае трисекции угла с помощью циркуля и линейки была доказана лишь после того, как Леонардо Пизанский (Фибоначчи, ок. 1170—1230 гг.) показал, что кубическое уравнение с целыми коэффициентами (а к его решению сводится задача трисекции угла) нельзя решить в общем случае с помощью одних только рациональных чисел и квадратичных иррациональностей.

Квадратриса Гиппия, которая могла, конечно, служить и для деления угла не только на три, но и на любое число равных частей, была использована Диностратом (около 350 г. до н. э.) для решения задачи квадратуры круга. Он был братом Менехма, о котором мы будем говорить ниже. Динострат доказал, что $OD = \frac{2a}{\pi}$, не при помощи предельного перехода, а путем сведе́ния к абсурду обоих исключающих это равенство допущений $OD < \frac{2a}{\pi}$ и $OD > \frac{2a}{\pi}$, воспользовавшись соотношением, которое мы записываем как $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, где α — острый угол. Исходя из $OA = a$ и $OD = \frac{2a}{\pi}$, легко было построить и длину πa, а следовательно, и квадрат, чья площадь равна кругу с радиусом a. Доказательство Динострата является исторически первым известным нам примером апагогического доказательства (доказательства от противного).

Гиппократ Хиосский. Разрозненные в различных школах математические знания, отдельные теоремы и их доказательства, отдельные приемы решения задач были впервые собраны воедино в систематическом изложении в утерянных «Началах» Гиппократа Хиосского (преподававшего в Афинах около 450—430 гг. до н. э.). Это сочинение содержало, по сведениям, переданным древними историками, основные положения, вошедшие позже в первые четыре книги Евклида. Самому Гиппократу принадлежат три открытия.

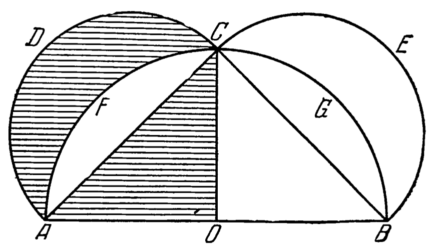


Рис. 10.

Во-первых, согласно Евдему, он доказал, что площади кругов пропорциональны квадратам, построенным на их диаметрах, — предложение, которое Евклид (кн. XII, предложение 2) ([92], т. 1, стр. 64) доказывает методом исчерпывания; вероятно, доказательство Гиппократа носило подобный характер.

Во-вторых, занимаясь решением задачи квадратуры круга, Гиппократ впервые построил криволинейные фигуры, — луночки, для которых при помощи циркуля и линейки можно построить равновеликие им фигуры, ограниченные прямыми. Это укрепляло надежду, правда, неосновательную, что удастся решить и задачу квадратуры круга. Простейшая квадрируемая луночка строится так. В полуокружность ACB впишем прямоугольный равнобедренный треугольник ACB и опишем над его катетами равные полуокружности ADC и CEB (рис. 10). Согласно открытому Гиппократом предложению о пропорциональности площадей кругов квадратам их диаметров, площадь полукруга ACB в два раза больше, чем площадь каждого из полукругов AFC и CEB, а следовательно, сумма площадей маленьких полукругов равна площади большого, т. е. $ADC + CEB = ACB$. Отнимая по обеим сторонам площади $AFC + CGB$, общие обеим фигурам, получим $ADCF + CEBG = \triangle ACB$ или $ADCF = \triangle ACO$.

Наряду с этой луночкой, снаружи ограниченной полуокружностью, Гиппократ рассмотрел еще две другие. Одна имеет внешним ограничением часть окружности, большую чем полуокружность. Сначала строят трапецию $ABCD$ со сторонами 1, 1, 1 и $\sqrt{3}$ (рис. 11). Затем описывают около нее окружность и на хорде $AD = \sqrt{3}$ строят сегмент AED, подобный каждому из сегментов AFB, BGC и CHD. Нетрудно доказать, что площадь луночки $AFBGCHD$ равна площади трапеции $ABCD$. Заметим, что построение трапеции $ABCD$ требует значительной привычки в обращении с геометрическими методами.

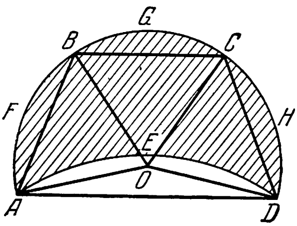


Рис. 11.

Другая луночка имеет внешним ограничением сегмент, меньший чем полуокружность. Над диаметром AB строится полуокружность с центром C (рис. 12). Затем в точке D, делящей CB пополам, проводят к AB перпендикуляр DE. Далее на полуокружности находят точку F так, чтобы $BF = \sqrt{3}\,AC$, и соединяют ее пересечение G с точкой C. Продолжение этой прямой CG пересекается в точке H с прямой FH, проведенной из F параллельно AB. После этого вокруг трапеции $FCBH$ описывают окружность, а затем другую вокруг треугольника FGH. Тогда каждый из двух сегментов, построенных на хордах FG и GH, будет подобен каждому из трех сегментов, построенных на хордах FC, CB и BH, причем каждый из первых двух сегментов по площади в полтора раза больше, чем каждый из трех других. Отсюда вытекает, что площадь луночки $FCBH$ равна площади пятиугольника $FCBHG$.

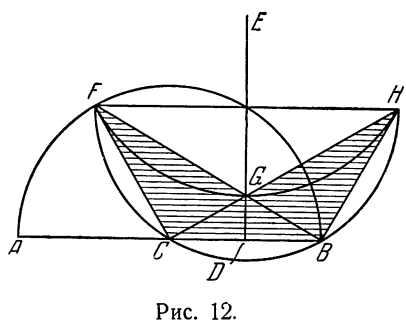


Рис. 12.

Наконец, Гиппократ показал также, что имеются луночки, площади которых вместе с площадью некоторого полукруга дают квадрируемую площадь. В полукруг с диаметром AB (рис. 13) вписывают трапецию $ACDB$ так, что $AC = CD =$

$= DB = \frac{1}{2} AB$. Затем на хордах AC, CD и DB строят полуокружности. Тогда сумма площадей трех равных трапеций вместе с площадью одной из трех полуокружностей будет равна площади трапеции.

Кроме луночек Гиппократа существуют еще два случая (с отношением радиусов окружностей, равным 5, или $\frac{5}{3}$, которые были найдены финским математиком Валлениусом (1766 г.). Советские математики Чеботарев и Дороднов доказали, что эти пять случаев являются единственными квадрируемыми луночками с рациональным отношением квадратов радиусов внешней и внутренней дуги луночки.

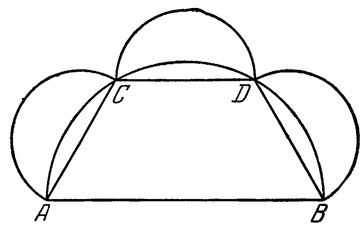


Рис. 13.

Третьим открытием Гиппократа было сведéние так называемой «делийской проблемы», т. е. задачи удвоения куба, к двойной геометрической пропорции. Легенда связывала эту проблему с требованием пифии построения кубического алтаря удвоенного объема, против имеющегося в Дельфах. Гиппократ нашел, что если $a : x = x : y = y : 2a$, то $a^3 : x^3 = a : 2a$. Возможно, что к этой мысли он пришел по аналогии с решением задачи удвоения квадрата, где имеет место простая геометрическая пропорция $a : x = x : 2a$, откуда $a^2 : x^2 = a : 2a$. Но возможно также, что ему были известны теоремы, вошедшие позже в «Начала» Евклида (кн. VIII, предложения 11, 12) ([92], т. 2, стр. 54), о лежащих между двумя квадратными числами одном, а между двумя кубическими числами двумя средними пропорциональными.

Хотя «Начала» Гиппократа до нас не дошли, можно все же предполагать, что они содержали в основном те материалы, которые затем вошли в первые четыре книги Евклида, в том числе и построения при помощи циркуля, которыми, по-видимому, пифагорейцы не занимались.

Архит Тарентский. После того как проблема удвоения куба была сведена к нахождению двух средних пропорциональных, за ее решение брались многие, среди которых первым был Архит Тарентский. Архит был государственным деятелем, полководцем и философом-пифагорейцем, другом Платона и учителем Евдокса. Он занимался математикой и ее применением к астрономии, механике и музыке. В пересказе

Симпликия ([98], стр. 467), комментатора Аристотеля, известна аргументация Архита в пользу неограниченности вселенной; он исследовал численные отношения созвучий в существовавших тогда трех музыкальных школах; в механике ему приписывают изобретение блока и винта, построение летающего деревянного голубя и детской трещетки, однако возможно, что речь идет о другом лице того же имени.

Из математических работ Архита известны лишь отрывки. К ним принадлежит доказательство теоремы, что между двумя величинами, находящимися в отношении $n:(n+1)$, не может быть средней геометрической.

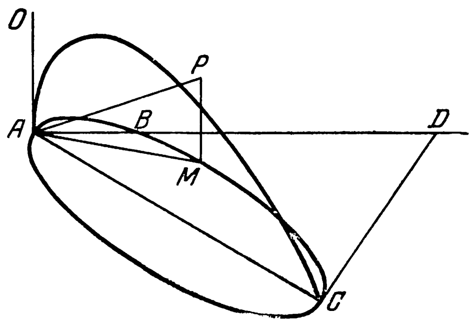


Рис. 14.

Однако наибольшее достижение Архита — его смелое решение делийской проблемы при помощи пересечения трех поверхностей вращения. Оно показывает, как далеко вперед шагнула уже тогда греческая математика, для которой представления трехмерного пространства были давно привычны. Пусть AB и AC — отрезки, между которыми требуется построить две средние пропорциональные (рис. 14). Построим на AC как на диаметре окружность; пусть AB будет ее хордой. Затем строим прямой цилиндр, имеющий своим основанием эту окружность — это первая из наших поверхностей. Далее на диаметре AC построим полукруг в плоскости, перпендикулярной к окружности, и будем вращать его вокруг оси AO, перпендикулярной к плоскости окружности. Так мы получим полутор (с внутренним диаметром, равным нулю). Эта вторая поверхность пересечется с цилиндром по пространственной кривой. Наконец, построим касательную CD к окружности ABC в точке C и продолжим ее до пересечения в точке D с продолженной хордой AB; заставим треугольник ACD вращаться вокруг AC. Так получим прямой круговой конус — третью поверхность, которая пересечет полученную прежде пространственную кривую в точке P. Нетрудно доказать, что тогда имеет место отношение $AC : AP = AP : AM = AM : AB$, где точка M является проекцией точки P на плоскость. В частном случае, когда $AC = 2AB$, мы получим $AM^3 = 2AB^3$, т. е. решение делийской проблемы. Плутарх рассказывает, будто Архит осуществил это решение механическим путем, с помощью изобретенного им прибора «мезографа». Ту же проблему удвоения куба решали позднее другими методами Евдокс, Менехм, далее Платон или один из его учеников, Никомед, Аполлоний, Герон, Филон Византийский, Диокл, Спор и Папп.

Теодор Киренский. Появление «Начал» Евклида, сочинения, которое в III в. до н. э. подвело итог трехсотлетнему развитию греческой математики, было подготовлено и работами Теодора из Кирены (около 410 г. до н. э.), ученика Протагора и учителя Теэтета. Теодор доказал иррациональность всех квадратных корней неквадратных чисел от 3 до 17, но каким именно способом, неизвестно. Может быть, что Теодор дал сначала доказательство иррациональности $\sqrt{5}$, как наиболее легкое, исходящее из задачи деления отрезка в крайней и средней пропорции — «золотого сечения», названного так Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.). Эта задача интересовала уже пифагорейцев, которые связывали эту пропорцию, а в особенности строящийся с ее помощью правильный звездный пятиугольник (пентаграмму) с магией — изображение этого пятиугольника встречается на вазах VII в. до н. э.

О древности задачи деления отрезка в крайней и средней пропорции свидетельствует и то обстоятельство, что она встречается во второй книге «Начал» Евклида, которая по содержанию принадлежит, как и все первые четыре книги, к наиболее древней части «Начал». Здесь эта задача сформулирована (кн. II, предложение 11) ([92], т. 1, стр. 75) без употребления понятия отношения, т. е. так же, как это делается во всех первых четырех книгах, между тем как с применением понятия отношения она дана в шестой книге (кн. VI, предложение 30) ([92], т. 1, стр. 213). Кроме того, Евклид занимается ею в четвертой книге (кн. IV, предложение 11—14) ([92], т. 1, стр. 133—138), где она применена для построения правильного пятиугольника, и в тринадцатой, где исследуются свойства этой пропорции и она применяется для построения правильных многогранников и сравнения их ребер.

После Евклида золотым сечением занимались Гипсикл (II в. до н. э.), Папп (III в. н. э.), средневековые математики, математики эпохи Возрождения, особенно в связи с его применением в архитектуре. Наконец, интерес к нему снова возрос в конце прошлого века, вызванный усилением мистических настроений, характерных для периода империализма.

Платон. Развитие математики, приведшее к созданию «Начал» Евклида, значительно стимулировалось борьбой между существующими тогда философскими и естественнонаучными школами. Для Платона (427—347 гг. до н. э.), ученика Сократа и главы реакционной, объективно-идеалистической философской школы, афинской «Академии», направленной против материализма и рабовладельческой демократии, математика представляла особый интерес. Хотя сам Платон, вопреки легендам, распространявшимся его учениками и последователями, старавшимися возвеличить его, и не был математиком, он и его школа придавали математике большое значение. Но они усматривали его отнюдь не в применении математики к практике, что считалось низменным занятием, а во-первых, в том, что занятие математикой было для них путем к миру «чистых идей», к познанию конечной цели философии — идеи бога, и во-вторых, в том, что оно было недоступно для народа, для «демоса», было привилегией аристократии, могло служить условием допущения к власти в платоновском идеальном государстве, этой по словам Маркса ([1], стр. 375) «афинской идеализации египетского кастового строя».

Однако несмотря на эти реакционные мотивы, само то обстоятельство, что Платон считал условием для занятия философией знание математики — над входом в «Академию» будто бы помещалась подпись: «Пусть не знающий геометрии не входит сюда», — сыграло положительную роль, потому что заставляло заниматься математикой.

Платон и платоники считали, что математические объекты занимают промежуточное место между чувственными вещами и чистыми идеями. Как известно, лишь идеям они приписывали подлинное существование, наделяя их единственностью, вечностью и неизменностью, между тем как материальные вещи, воспринимаемые чувствами, были в их глазах лишь тенью идей, были множественны, преходящи и изменчивы. Любой математический объект, например треугольник, хотя и обладал, подобно идеям, вечностью и неизменностью, однако обладал также и множественностью — существует ведь не один-единственный треугольник, а бесконечное множество треугольников, которые являются лишь образами абсолютного треугольника, пребывающего в мире идей.

Исходя из этого абсолютно идеалистического понимания математического существования, платоники считали, что математические истины являются теоремами, поскольку решение любой задачи лишь устанавливает то, что существует независимо от того, установили мы это или нет.

Прямо противоположной была точка зрения естественнонаучной и математической школы Евдокса, о роли которого мы скажем в дальнейшем, а в особенности ученика Евдокса Менехма. Менехм считал, что математические истины являются проблемами, что недостаточно дать, например, определение равностороннего треугольника, а для того, чтобы доказать его существование, нужно построить его, проверив затем, удовлетворяет ли он условиям.

Эта точка зрения, доведенная до крайности, обедняет математику, исключая рассмотрение объектов, которые мы пока не умеем построить. И хотя в конечном счете она коренилась в пифагорейском субъективно-идеалистическом мировоззрении, с которым школа Евдокса была связана, она имела перед платоновской преимущество действенности. И хотя в латинских переводах «Начал» Евклида употребляются оба термина, — теоремы и проблемы, — по существу в них проводится точка зрения Менехма; так, например, прежде чем пользоваться серединой отрезка, доказывается построением, что она действительно существует (кн. I, предложение 10) ([92], т. 1, стр. 24).

Именно в борьбе против платонизма математики того времени стали переходить к решению задач не одним только умозрительным путем, а доведением их до действительного построения, которое требовалось, если математика должна была практически применяться. На этой почве утвердилось и понятие «диорисмо́с» — указание необходимых условий, делающих решение возможным. Так, прежде чем решать задачу о построении треугольника по заданным сторонам, доказывается необходимое условие: каждая из сторон должна быть меньше суммы двух других (кн. I, предложение 20, 22) ([92], т. 1, стр. 32, 94).

Полемика между обеими школами привела также к тому, что были философски осмыслены практиковавшиеся уже давно методы решения задач: анализ, который изучает целое путем разложения его на части, и синтез, который исходит из частей, соединяемых им воедино. Возникшие в школе Евдокса рассуждения об анализе и синтезе включены в большинство списков «Начал» Евклида в книгу XIII.

Борьба между платоновской и естественнонаучной школами привела к тому, что стали обращать усиленное внимание на определения математических объектов. Определения чисел как четных, нечетных и т. п. платоники переняли почти без изменений от пифагорейцев. Иначе обстояло дело с определениями геометрических объектов. Эти определения, ссылающиеся на чувственно-наглядные представления, вытекающие из эксперимента, явно испытали на себе влияние естественнонаучной школы или прямо возникли в ней. К ним относится и приводимое Платоном определение прямой как «линии, середина которой покрывает оба конца», т. е. для глаза, помещенного в любом из концов отрезка и глядящем вдоль него, прямой отрезок представляется точкой.

Хотя сам Платон не сделал никаких математических открытий, в его философских и политических диалогах упоминается немало математических вопросов.

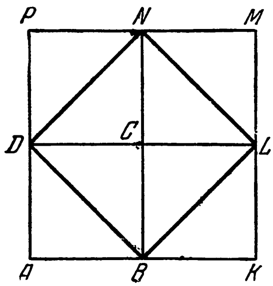


Рис. 15.

Так, в диалоге «Республика» Платон, перечисляя предметы, которым следует обучать будущего государственного деятеля, называет впервые, кроме четырех пифагорейских дисциплин, — арифметики, геометрии, астрономии и музыки, — как отдельную дисциплину еще стереометрию. Но это, конечно, не значит, что до Платона греки не занимались стереометрией. Точно так же из того, что пять правильных многогранников называли «платоновыми телами», не следует, что эти многогранники были открыты Платоном — это название они получили потому, что в «Тимее» Платон приписывает атомам четырех элементов форму первых четырех правильных многогранников, а именно, тетраэдра — огню, икосаэдра — воде, октаэдра — воздуху и куба — земле, между тем как форму пятого правильного тела — додекаэдра — по мнению Платона, бог придал вселенной в целом. На средневековом Востоке эти многогранники так и сохранили названия тело огня, тело земли и т. д.

Наибольшую известность из математических мест, содержащихся в сочинениях Платона, получили, однако, два места в «Меноне». В одном из них ([99], стр. 176—184 (82а—85б), Сократ, желая доказать, что познание будто бы сводится к воспоминанию души о том, что ей уж известно из прожитой до рождения жизни, ставит мальчику-рабу Менону ряд наводящих вопросов, требующих в ответ либо «да», либо «нет», и ведущих к геометрическому построению $\sqrt{2}$. Сначала мальчик полагает (рис. 15), что $AKMP = 2ABCD$, потом, что удвоение квадрата $ABCD$ получим, взяв квадрат со стороной, равной $\frac{3}{2}$ AB, наконец, что $BLND = 2ABCD$. Как заметил Фраезе [81], это рассуждение как бы повторяет метод подбора, которым первоначально подыскивали приближенное значение $\sqrt{2}$. Второй математический отрывок в Меноне ([99], стр. 186—187 (86е—87в)) настолько неясен, что опубликовано около полусотни различных его истолкований. По-видимому, здесь говорится о том, что треугольник данной площади при одних условиях может быть вписан в данный круг, а при других — нет. Платону приписывают также правило получения взаимно простых пифагорейских чисел $x = 4p^2 - 1$, $y = 4p$, $z = 4p^2 + 1$, где x и z — два соседних нечетных числа.

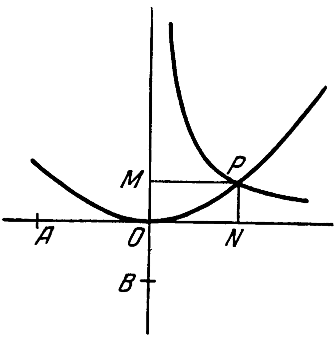


Рис. 16.

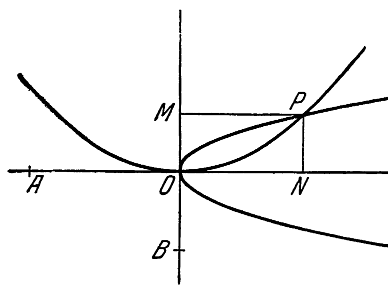


Рис. 17.

Наконец, Платону приписывается решение задачи удвоения куба, вероятно, принадлежащее на самом деле какому-нибудь современнику Менехма (IV в. до н. э.) или жившему после него. Менехм применил открытые им конические сечения для нахождения двойной средней пропорциональной и дал два решения задачи удвоения куба. Пусть (рис. 16) $AO = 2OB$, $AO : OM = OM : ON = ON : OB$; тогда имеем $OB \cdot OM = ON^2 = PM^2$, а следовательно, P лежит на параболе, имеющей вершину O и расстояние до директрисы, равное OB; одновременно $AO \cdot OB = OM \cdot ON = PN \cdot PM$, и значит, P лежит на гиперболе, имеющей центр O и асимптоты OM и ON. Таким образом, точку P получим как пересечение параболы и гиперболы. Таково первое решение Менехма. Во втором решении (рис. 17) гиперболу заменяет вторая парабола с вершиной O и расстоянием до директрисы, равным OA, ибо имеет место $AO \cdot ON = OM^2 = PN^2$. К этому решению примыкает как раз так называемое решение Платона. Если заданные отрезки и средние пропорциональные расположим крестообразно (рис. 18) в том же порядке, как они следуют в пропорции, и мы проведем отрезки AM, MN, NB, то ясно, что углы AMN и MNB будут прямыми. Фигура $AMNBO$, где даны AO и BO и угол AOB прямой, может быть построена при помощи двух прямоугольных угольников. Один из них расположим так, чтобы одна его сторона проходила через B, а вершина лежала на продолжении AO; затем заставим второй скользить по первому так, чтобы одна его сторона проходила через A, и попытаемся, поворачивая при этом насколько надо первый угольник, добиться того, чтобы вершина второго угольника попала на OC.

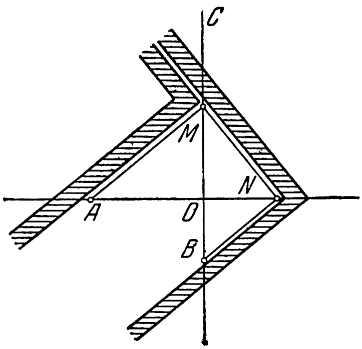


Рис. 18.

Теэтет Афинский. Ученик Теодора из Кирены, Теэтет Афинский (около 414—369 гг. до н. э.) внес два важных вклада в математику, вошедшие позже в «Начала» Евклида. Во-первых, он дал классификацию иррациональностей. Кроме отрезков, соизмеримых и несоизмеримых $\sqrt{a}$, вводится так называемая медиаль (в нашем обозначении $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$, где a и b — соизмеримы), далее биномиаль $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, первая бимедиаль $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$, где произведение $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$ — рационально, и вторая бимедиаль $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$, где произведение $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}\times\times\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$ — иррационально, но имеет вид $\sqrt{e}$. Эти шесть видов величин образуют первую гексаду, в которой произведение квадратов обеих слагаемых, образующих данную величину, всегда рационально. Вторая гексада иррациональностей отличается от первой тем, что упомянутое только что произведение иррационально. Третья и четвертая гексады аналогичны предыдущим двум, отличаясь от них лишь тем, что место сложения занимает вычитание; величина вида $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (в нашем написании) называется вычет или «апотом». В «Началах» Евклида классификации и свойствам иррациональностей посвящена вторая часть X книги (кн. X, предложение 21—115) ([92], т. 2, стр. 124—254). Теэтету принадлежит также в той или другой мере построение пяти правильных многогранников, вошедшее затем в XIII книгу «Начал» Евклида.

Евдокс Книдский. Непосредственным предшественником Евклида был Евдокс Книдский (около 408—355 гг. до н. э.), ученик Архита Тарентского, глава кизикской школы, которая, несмотря на свои связи с пифагорейцами и платониками, выступала против спекулятивного понимания природы, против астрологии и прочей мистики, за наблюдение и эксперимент, за чисто научное объяснение явлений. Эвдокс был не только крупным математиком, но и астрономом, усвоившим во время своего пребывания в Египте (около 380 г. до н. э.) египетские астрономические знания, построившим обсерваторию в Книде и создавшим первую чисто математическую теорию движения планет. Важнейшим вкладом Евдокса в математику является его теория отношений. После открытия несоизмеримостей прежняя пифагорейская теория, основанная на понимании отношения двух отрезков как отношения двух целых чисел, а поэтому пригодная лишь для соизмеримых величин, не могла дольше служить для решения геометрических задач. Поэтому геометры стремились избегать отношений, заменяя их, где только возможно, другими методами. Это нашло свое отражение в «Началах» Евклида, первые четыре книги которых обходятся без отношений, а вместо них зачастую применяются весьма остроумные приемы.

Но те же задачи (и даже в более общем виде) решаются в шестой книге «Начал» с помощью отношений, после того как книга V излагает общее учение об отношениях Евдокса, самое существенное в котором то, что понятие «отношения» применимо в нем как к соизмеримым, так и к несоизмеримым отрезкам.

Поскольку, с точки зрения древних, несоизмеримые отрезки не могли сравниваться друг с другом при помощи чисел (так как понятие иррационального числа отсутствовало), нужно было создать другое понятие, отличное от числа, которым явилось «отношение». Без него нельзя было в общем случае рассматривать пропорциональность отрезков, а следовательно, и подобие треугольников и т. д.

Понятие отношения выясняется в трех определениях (Евклид, «Начала», кн. V, определения 3, 4, 5) ([92], т. 1, стр. 142). Во-первых, устанавливается, что необходимым условием того, что две величины находятся в отношении, является их однородность, а основанием отношения служит количество. Во-вторых, устанавливается, что даже не все однородные величины имеют между собой отношение; чтобы две однородные величины A и B имели отношение, необходимо, чтобы, если $A > B$, существовало такое число n, что $A < nB$. Таким образом, здесь мы имеем как бы в зародыше аксиому, получившую название аксиомы Евдокса — Архимеда, постулирующую, что каждые две величины должны обладать указанным свойством. Наконец, в-третьих, дано определение равенства отношений, наиболее важное, так как лишь благодаря ему отношения могут применяться в математике. Отношение величин A и B равно отношению величин C и D, если для любых целых чисел m и n из $mA \geqslant nB$ следует, что $mC \geqslant nD$, и из $mA \leqslant nB$ следует, что $mC \leqslant nD$. Более подробно мы рассмотрим теорию отношений Евдокса ниже (см. стр. 139—140).

Теория отношений Евдокса позволила считать, что два отрезка находятся в отношении и тогда, когда они несоизмеримы, т. е. когда их отношение мы выражаем иррациональным числом, понятия которого не было у древних. Следовательно, эта теория заменяла в некотором смысле теорию действительных чисел и давала возможность построить теорию подобных геометрических фигур.

Теория отношений Евдокса тесно связана с другим вкладом Евдокса в математику, с методом, получившим в XVIII в. название метода исчерпывания. В предисловии к первой книге сочинения «О шаре и цилиндре» Архимед отметил, что лишь Евдокс доказал открытые, но не доказанные Демокритом теоремы о равенстве объема пирамиды и одной трети объема призмы с тем же основанием и высотой, и аналогично, конуса и цилиндра. А в предисловии к «Квадратуре параболы» Архимед добавляет, что это доказательство было дано при помощи леммы, сходной с аксиомой Евдокса — Архимеда.

Метод исчерпывания, применяемый в XII книге «Начал» Евклида, состоит в следующем. Для того чтобы доказать, что площади кругов относятся друг к другу как квадраты, построенные на их диаметрах (рис. 19), впишем в круги с диаметрами d и D квадраты, имеющие площади a и A. Тогда будем иметь отношение $\frac{a}{A}=\left(\frac{d}{D}\right)^2$, которое было доказано раньше. Вписанный квадрат, например a, будет больше, чем половина описанного около него круга k, так как квадрат a равен половине описанного около круга k квадрата, который, разумеется, больше круга k. То же относится и к квадрату A и описанному около него кругу K. Далее впишем в оба круга правильные восьмиугольники b и B, разделив соответствующие дуги пополам. Аналогичным рассуждением нетрудно доказать, что каждый из добавленных к квадрату a треугольников будет больше, чем половина описанного около него сегмента круга k, а следовательно, площадь b восьмиугольника больше трех четвертей площади круга k. Так же будет и $B > \frac{3}{4}K$. При этом для площадей b и B также будет иметь место отношение $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$. Продолжая этот процесс, т. е. вписывая последовательно правильные 16-угольники c и C, затем 32-угольники e и E и т. д., мы, во-первых, сохраним для их площадей все то же отношение $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{e}{E} = \ldots$ $\ldots = \left(\frac{d}{D}\right)^2$, и, во-вторых, вписанные многоугольники будут все больше исчерпывать круги k и K. По лемме Евдокса, — если от

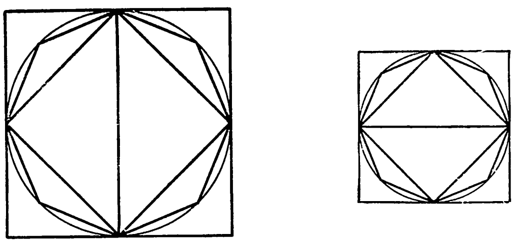


Рис. 19.

какой-нибудь величины M отнять сначала величину большую половины M, затем от остатка — величину большую его половины и т. д., то после достаточного количества шагов остаток всегда может быть сделан меньше, чем любая наперед заданная величина m. Следовательно, остающиеся части кругов могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Греки хотя и пользовались практически предельным переходом, но не создали себе его понятия, а тем более не располагали теорией пределов. Поэтому, чтобы доказать, что не только вписанные правильные многоугольники с возрастающим числом сторон, все больше исчерпывающие круг, относятся друг к другу как квадраты диаметров, но что это же отношение имеют и описанные около них круги, они пользовались доказательством от противного. Греки показывали, что противоположные предположения, будто отношение площадей кругов $\frac{k}{K}$ больше или меньше отношения квадратов диаметров, приводят к противоречиям. Самый метод доказательства от противного носит явный отпечаток своего происхождения из политических и судебных споров — он применялся для того, чтобы сведéнием к абсурду уличить противную сторону в неправоте.

Первоначально метод исчерпывания применялся лишь для доказательства теорем, добытых при помощи других методов, в особенности при помощи неделимых, правомерность использования которых оспаривалась. Но полтора века спустя Архимед, также применявший метод неделимых как эвристический метод, вместе с тем усовершенствовал метод исчерпывания, весьма искусно решая им разнообразные задачи определения площадей и объемов.

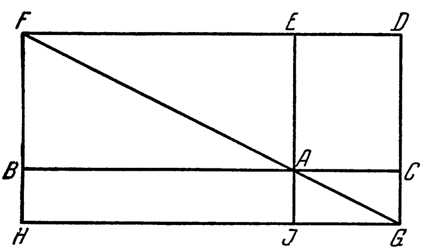


Рис. 20.

Геометрическая алгебра. Приложение площадей. Открытие несоизмеримости, невозможность выразить отношение любых двух отрезков отношением двух целых чисел привели к тому, что греки стали употреблять не арифметические, а геометрические отношения для выражения общих отношений между величинами. У них создалась своеобразная «геометрическая алгебра». Именно по этой причине, а вовсе не из-за особого предрасположения «греческого духа» к геометрическим формам, как это утверждают идеалисты, у греков геометрия стала играть роль алгебры. Для того чтобы решить уравнение $ax = b^2$, греки рассматривали b^2 как заданную площадь, a — как заданный отрезок, x — как неизвестный. Задача сводилась к построению прямоугольника с заданной площадью и одной стороной, или, как они говорили, к «приложению» (παραβολή) площади к данному отрезку. Если $AB = a$, и $ACDE = b^2$ — прямоугольник, построенный на продолжении отрезка AB, то построение искомого x осуществляется так (рис. 20): продолжим DE до точки F, в которой DE пересекается с перпендикуляром BF к AB, затем соединим точки F и A и продолжим до пересечения с продолжением DC в точке G, наконец, проведем JH параллельно AB до пересечений J и H с продолжениями EA и FB. Легко заметить, что прямоугольники $ABHJ$ и $ACDE$ равны, так как получаются вычитанием равных площадей из равных треугольников FHG и FGD, а следовательно, $x = CG = AJ = BH$. Такого рода задачи вошли в «Начала» Евклида (кн. I, предложение 44, 45) ([92], т. 1, стр 55—56);

метод «приложения площадей» давал возможность решать не только линейные, но и квадратные уравнения.

В более общем виде метод приложения площадей применялся для решения задач, ведущих в современном нам истолковании к решению квадратных уравнений с одним неизвестным. При этом различали два случая. В первом требовалось на данном отрезке $AB = a$ построить прямоугольник $ABHJ$ с площадью ax, равный данному квадрату $b^2\left(b < \frac{a}{2}\right)$, так, чтобы часть площади, недостающая до прямоугольника $ABHJ$, была квадратом ($AEFJ = x^2$). Иначе говоря, требуется решить уравнение $ax - x^2 = b^2$. Это построение, названное древними эллиптическим приложением площадей (от «ἔλλειψις» — нехватка), мы получаем при помощи сведе́ния к предыдущему (рис. 21). Точкой C делим AB пополам и строим перпендикуляр $CD = b$. Затем на AC находим точку E так, чтобы $DE = AC$. Наконец, строим прямоугольник $ABHJ$ таким образом, что $AJ = EA$. Доказательство мы получим, дополнив CA до квадрата $ACKL$ и EA до прямоугольника $AEML$, равновеликого прямоугольнику $BCNH$. Тогда очевидно, что прямоугольник $BEFH$ и гномон $CALMFN$ равновелики, а следовательно, этот прямоугольник, равный b^2, равен разности квадратов $ACKL - NFMK = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$. Таким образом, $\frac{a}{2} - x$ можно получить с помощью теоремы Пифагора как катет CE в треугольнике CED, где $CD = b$ и $CE = \frac{a}{2}$, как мы и сделали.

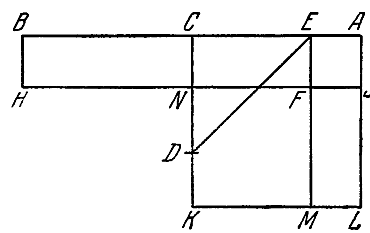


Рис. 21.

Аналогичное построение применялось и для случая гиперболического приложения площади (от «ὑπερβολή» — избыток), когда требовалось построить (рис. 22) на данном отрезке $AB = a$ прямоугольник $ABHJ$ с площадью ax, равный данному квадрату b^2 так, чтобы избыточная часть площади над прямоугольником была квадратом ($AEFJ = x^2$). Эта задача соответствует решению квадратного уравнения $ax + x^2 = b^2$. Здесь $FM = BC$ и $CE = DA$.

Метод приложения площадей, дающий в геометрическом виде действительные положительные решения квадратных уравнений, применялся прежде всего для построения вписанного в круг правильного многоугольника, число сторон которого равно $5 \cdot 2^n$ или $3 \cdot 5 \cdot 2^n$, при заданном радиусе или при заданной стороне.

В дальнейшем три случая приложения площадей получили связь с коническими сечениями. Открытие последних приписывается Менехму, брату Динострата, жившему в середине IV в. до н. э. Как и его брат, применивший для решения задачи трисекции угла квадратрису, открытую Гиппием Элидским (V в. до н. э.), Менехм занимался решением задачи удвоения куба. Как мы уже видели, эта задача сводилась к нахождению двух средних пропорциональных x и y между отрезками a и b из $a : x = x : y = y : b$, где, следовательно, $x^2 = ay$, $y^2 = xb$, $xy = ab$, для частного случая $b = 2a$. Как сообщает Евтокий (около 500 г. н. э.), Менехм открыл (около 350 г. до н. э.), что связь между отрезками, выраженная нами в первых двух уравнениях, выражает свойство (как мы сказали бы) декартовых координат определенной кривой, полученной сечением прямого прямоугольного кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей и аналогично для третьего уравнения, — свойство кривой, получаемой сечением тупоугольного конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей. Если OBC — сечение прямоугольного конуса (рис. 23), проходящее через ось OK, и AH — след сечения, проходящего перпендикулярно к OB и плоскости чертежа, то точка N пересечения BC и AH будет следом точки P кривой. Так как BC является диаметром кругового сечения конуса, то имеет место равенство $NP^2 = BN \cdot NC$, или, поскольку $BN = \sqrt{2} AN$ и $NC = \sqrt{2} \cdot CH = \sqrt{2} \cdot AO$, $NP^2 = 2 \cdot AO \cdot AN$; или же, если обозначим $AN = x$, $NP = y$, $AO = p$, $y^2 = 2px$. Аналогично Менехм мог получить и соответствующее уравнение (конечно, в словесном выражении) для равнобочной

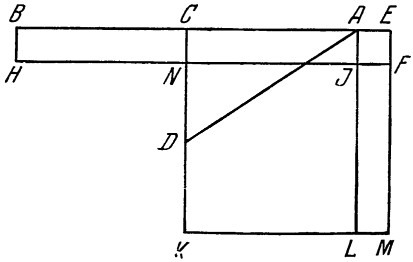


Рис. 22.

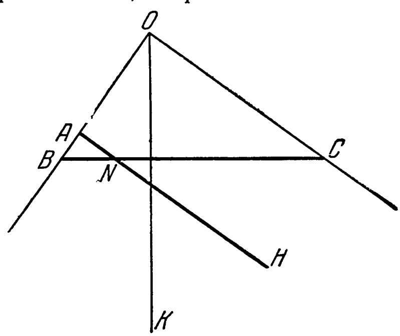


Рис. 23.

гиперболы, сначала относительно ее осей, а затем и асимптот. Третье коническое сечение, — эллипс, — которое, в виде проекции круга и косого сечения кругового цилиндра не могло не быть знакомо грекам, Менехм строил тем же способом, что и сечение остроугольного прямого кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей.

Кроме теории пропорций, Евдоксу принадлежит, как утверждает Архимед в предисловии к книге I своего сочинения «О шаре и цилиндре», доказательство теорем, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы с тем же основанием и высотой, и что объем конуса равен одной трети объема цилиндра того же основания и высоты, а также доказательство теоремы о пропорциональности объемов шаров кубам их диаметров.

Утерянный астрономический труд Евдокса «О скоростях» содержал теорию концентрических сфер — первую попытку дать чисто геометрическое объяснение кажущимся неправильностям в движениях планет, а также более простым видимым движениям Солнца и Луны. Евдокс, как и все до Кеплера, считал, что движения небесных тел круговые, причем эти круговые движения осуществлялись при помощи концентрических сфер с общим центром в центре Земли. Придуманная Евдоксом геометрическая гипотеза, дававшая хорошее соответствие с наблюдаемыми фактами, представляла для того времени замечательное достижение абстрактного мышления.

Аристотель. Хотя величайший мыслитель древности Аристотель (384—322 гг. до н. э.) и не писал специально по математике, в его философских и естественнонаучных сочинениях встречается немало высказываний, представляющих большой интерес для истории математики, характеризующих состояние этой науки в период, непосредственно предшествовавший «Началам» Евклида. У Аристотеля уже изложены основные принципы построения дедуктивной системы, разъяснена сущность аксиом, постулатов, определений, гипотез и доказательств. Под аксиомами, которые он называет «общими мнениями», Аристотель понимает положения, общепризнанные во всех науках, между тем как под постулатами он понимает допущения, принятые без доказательства в какой-нибудь отдельной науке. Определения, как правило, не включают в себя утверждение существования определяемого предмета; это существование (например, треугольника) необходимо еще доказать. Исключение составляют определения основных понятий — единицы, точки, линии. Построение служит доказательством существования. При этом, однако, построенные геометром фигуры служат лишь иллюстрацией: он не строит свое доказательство на данной частной фигуре, и его гипотеза не станет неверной оттого, что начерченная им линия не имеет в точности ту длину, которую он предположил ([100], стр. 199—201 (76а—77а)). Эти установки Аристотеля, направленные против платоновского понимания предмета математики, нашли свое отражение у Евклида.

В связи с разъяснением положения, что предметом философии является сущее как таковое, Аристотель, желая показать, что одна и та же наука может иметь дело с большим количеством разнородного содержания, высказывается о математических понятиях, подчеркивая, что они — абстракции предметов реального мира. Он пишет: «И в отношении сущего примером служит то рассмотрение, которому математик подвергает объекты, полученные посредством отвлечения. Он производит это рассмотрение, сплошь устранивши все чувственные свойства, например тяжесть и легкость, жесткость и противоположное [ей], далее — тепло и холод и все остальные чувственные противоположности, а сохраняет только количественную определенность и непрерывность, у одних — в одном направлении, у других — в двух, у третьих — в трех, а также свойства этих объектов, поскольку последние количественно определены и непрерывны, но не с какой-нибудь другой стороны; и у одних предметов он разбирает те положения, в которых они стоят друг к другу, и то, что связано с этими положениями, у других — их соизмеримость и несоизмеримость, у третьих — их [взаимное] соотношение, но все-таки мы принимаем одну и ту же науку для всех этих предметов [именно] — геометрию» ([77], стр. 185—186 (1061а—1061в).

Аристотель дает следующее определение непрерывности: «Непрерывное» есть само по себе нечто смежное; я говорю о непрерывном, когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается, а это невозможно, пока у них существуют два края» ([95], стр. 113 (227а)).

Формулируя содержание понятия «единого» как такового, по его логической природе, а не в смысле связанного в единство целого, Аристотель дает определения единицы, точки, линии, поверхности, тела. Он говорит: «А сущность единого — в том, что оно известным образом представляет собою начало числа... Но при этом единое [это] — не одно и то же для всех родов: в одном случае это — наименьший интервал, в другом — гласный и согласный звук; особая единица для тяжести и другая — для движения. И повсюду единое неделимо или по количеству или по виду. Если взять при этом то, что неделимо по количеству (и поскольку оно есть количество), тогда неделимое во всех отношениях и ненаделенное [определенным] положением называется единицей, а неделимое во всех отношениях и имеющее положение — точкой; если [что-нибудь делимо] в одном отношении [оно называется] линией, [то, что делимо] в двух отношениях [называется] плоскостью, [то, что делимо] по количеству всякому, а именно в трех направлениях — телом. И если пойти в обратном порядке — то, что делимо в двух отношениях, это — плоскость, то, что делимо в одном отношении — линия, то, что никак неделимо по количеству, это — точка и единица, причем не имеет положения единица, а имеет положение точка».

Аристотель метафизически противопоставлял прерывность и непрерывность как исключающие друг друга противоположности. Поэтому он считал, что линия не может состоять из точек. Он писал: «Если существует непрерывное, касающееся и следующее друг за другом в том смысле, как это определено выше, именно непрерывны те предметы, края которых сливаются в одно; касаются те, у которых они вместе; следует друг за другом те, между которыми нет ничего сродного им, — невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей, например, линии из точек, если линия непрерывна, а точка неделима. Ведь края точек не образуют чего-нибудь единого, так как у неделимого нет ни края, ни другой части; и крайние границы не находятся в одном месте, так как нет у неделимого крайней границы, ибо крайняя граница и то, чему она принадлежит, различны. Далее, точкам, из которых было бы составлено непрерывное, необходимо или быть непрерывными или касаться друг друга (то же самое рассуждение применимо и ко всяким неделимым) ... Очевидно также, что все непрерывное делимо на части, всегда делимые (и величины, и время, и движение) ([95], стр. 124, (131а)).

Большое внимание Аристотель уделил понятию математической бесконечности ([95], стр. 55—68 (202в—208а)). Бесконечное — это то, что не может быть пройдено, оно не остается, а становится. Придерживаясь этого взгляда, Аристотель вместе с тем обнаруживает противоречия. С одной стороны, он считал, что бесконечность в малом неограниченно делима, т. е. допускается лишь потенциальная бесконечность. Но это он относил только к физической бесконечности, только к чувственным предметам; для математики он допускал и актуальную бесконечность. Вместе с тем Аристотель отмечал, что бесконечность не есть простое повторение одного и того же, а всегда приводит к новому, но и тут он вновь впадает в противоречие, заявляя, что превзойти всякую величину путем прибавления невозможно даже потенциально

Аристотель считал, что поскольку математика имеет своим предметом не реальные вещи, а абстракции от них, в ней недопустимо пользоваться движением. Разбирая учения философов, поставивших перед собой задачу познавать вещи не воспринимаемые чувствами, он писал: «Что касается так называемых пифагорейцев, то они пользуются более необычными началами и элементами, нежели философы природы (причина здесь в том, что они к началам этим пришли не от чувственных вещей, ибо математические предметы чужды движению, за исключением тех, которые относятся к астрономии); но при этом все свои рассуждения и занятия они сосредоточивают на природе...» ([77], стр. 33 (989в)).

Вместе с тем, по соображениям логической строгости, которая не допускает, чтобы доказательства переходили из одного рода в другой, Аристотель отрывает геометрию от арифметики. Он заявляет: «Следовательно, [положения], на основании которых ведется доказательство, могут быть одними и теми же, но в [науках], род которых различен, как, например, [род] арифметики и геометрии, не годится арифметическое доказательство для случайных [свойств] величин, если только [эти] величины не являются числами» ([100], стр. 195—196 (75в)).

Вскрывая логическую ошибку, называемую petitio principi, когда ошибочно принимают за доказуемое положение то, что́ должно служить посылкой, и наоборот, берут посылкой (основанием доказательства) то, что есть следствие положения, Аристотель высказывается о попытках дать доказательство параллельности прямых, исходя из равенства соответственных углов: «Так поступают <например> те, кто думает проводить параллельные линии. В самом деле, они, сами того не зная, <в основу доказательства> берут то, что само не может быть доказано, если <линии> не параллельны» ([100], стр. 155 (65а)). Таким образом, Аристотель считает, что равенство соответственных углов является следствием параллельности, а не наоборот.

В вопросе о том, что математика не должна пользоваться для своих доказательств движением и что геометрия не должна применять арифметические доказательства, взгляды Аристотеля и Платона совпадали, но они расходились относительно происхождения и сущности математических понятий, которые, по Платону, не то принадлежат потустороннему миру идей, не то занимают промежуточное положение между этим миром и миром чувственных вещей. Взгляды Аристотеля, как мы убедимся, в значительной мере были восприняты Евклидом. Последний, правда, немного отошел от Аристотеля в своих определениях единицы и точки, сохранив определения линии, поверхности и геометрического тела; целиком разошелся с ним в понимании непрерывности, но принял в принципе его методологические требования относительно недопустимости применения в геометрии движения и арифметики, хотя на деле Евклид сам нарушал этот принцип, а также трактовал параллельные линии как Аристотель.

Для обозначения величин Аристотель применял буквы алфавита. Этими обозначениями широко пользовался Евклид, а после того как между буквами стали писать арифметические знаки, этот метод стал методом буквенной алгебры.

ГЛАВА IV

МАТЕМАТИКА В ЭЛЛИНИСТИЧЕСКИХ СТРАНАХ

Эллинизм. В конце IV в. до н. э., после походов Александра Македонского, была создана огромная, но недолговечная империя, включавшая Грецию, Египет, Месопотамию, Персию, Переднюю Азию, Причерноморье и ряд других стран Средиземноморья и Ближнего и Среднего Востока. После смерти Александра его империя распалась на государство Птолемеев в Африке, государство Селевкидов в Азии и ряд более мелких государств, однако общение различных народов империи Александра между собой во время его походов оказало исключительное влияние на развитие культуры в этих странах. Ученые этих стран усваивают научные результаты друг друга и прежде всего результаты древнегреческой науки; греческий язык и многие обычаи греков распространяются среди образованных кругов во всех этих странах; эти круги, как говорят, подвергаются эллинизации. Страны, в которых имела место такая эллинизация, называют эллинистическими странами, а весь период существования этих стран называют периодом эллинизма.

Экономическую основу эллинистических стран составлял тот же рабовладельческий строй, который господствовал в этих странах до походов Александра, однако на первое место в этих странах выдвигается военная знать, из среды которой происходят и царские династии Птолемеев и Селевкидов.

Период эллинизма длился до завоевания эллинистических стран Римом, закончившегося в первом веке до н. э. Крупнейшими центрами культурной жизни эллинистических стран были Александрия, Антиохия, Пергам и остров Родос.

Александрийская школа. Наибольшее значение в этот период приобретает Александрия, основанная Александром в 332—331 г. до н. э. в Египте и ставшая позже столицей государства Птолемеев. Здесь скапливались богатства, награбленные в походах, здесь, на перекрестке торговых путей Востока и Запада, развивалась морская торговля; на основе жестокой эксплуатации рабского труда процветали ремесла. Обогащались привилегированные слои общества, рабовладельцы, прежде всего придворная птолемеевская знать. В отличие от классической греческой культуры, александрийская культура характеризовалась большей специализацией, индивидуальными особенностями. Центром науки был Музей, где хранилось несколько сотен тысяч свитков. Как никогда прежде, наука щедро субсидировалась династией Птолемеев, соперничавшей с другими эллинистическими монархиями.

Здесь, в Александрии, как отмечает Энгельс ([2], стр. 21), впервые из прежней нерасчленной науки, объединявшей философию, математику и естествознание, начали выделяться отдельные самостоятельные науки. Это были астрономия, математика и механика как зачатки точного и систематического естествознания.

Расцвет математики, так же как и естественных и технических наук, был вызван прямо или косвенно практическими потребностями общества александрийского периода. Накопление материальных богатств и запасов оружия привело к переходу от милиционной армии к постоянным профессиональным армиям большой численности, к наемничеству, а в связи с этим к новым способам ведения войны, а следовательно, и к новой военной технике. Развитие строительства военных кораблей, боевых башен и таранов, осадных метательных орудий, возведение крепостей и маяков, создание географических карт, упорядочение календаря — все это требовало развития механики, астрономии, а следовательно, и математики. Птолемеи, стремившиеся к показному подражанию классической греческой и древнеегипетской культуре, воздвигали дворцы, создавали гидротехнические сооружения, что также содействовало развитию технических, естественнонаучных, а значит, и математических знаний.

Хотя в условиях рабовладельческого общества наука достигла в Александрии значительного развития, она носила на себе печать этого общественного уклада. Новые достижения техники ограничивались областью военного дела и строительства, основной двигательной силой оставался физический труд людей и животных, в производстве применялись грубые ручные орудия, которые непокорным рабам трудно было испортить. Рабовладельцы и другие свободные граждане относились с презрением к производительной деятельности, к труду, считая физический труд недостойным свободного человека, и лишь небольшая часть их занималась умственным трудом — управлением государством, науками и искусством. Однако естественнонаучные и математические знания лишь в сравнительно небольшой степени применялись на практике; в основном они заполняли досуг избранных любителей.

При этом философия, выражавшая идеологию правящего класса отмирающего рабовладельческого строя, развивалась в полном отрыве от естествознания. Это была — во всех своих трех основных разновидностях, в неоплатонизме, неопифагореизме и александрийском иудаизме — философия вырождения и упадка, проникнутая мистическими идеями самых различных восточных религиозных сект.

Что же касается математики, то ее отношение к практике и к философии были немного другим, чем у естественных наук. Математика находила все-таки значительно большее применение в практике, чем слабо развитые естественные науки, а ее взаимосвязь с философией была несомненна. Отрыв от производительного труда тех общественных слоев, из рядов которых выдвигались математики, сказался в уже отмеченном делении математики на арифметику и геометрию, с одной стороны, и на логистику и геодезию, — с другой. Это деление, на котором настаивал еще Платон, а также и Аристотель, деление, которое не признавало прикладную математику наукой, а относило ее к ремеслам, начало проявляться и в александрийской математике. Однако в лице Архимеда и Герона эта дискриминация встречала здесь сопротивление. Лишь позже, в I—II вв. н. э., это деление узаконилось, превратилось в дурную традицию. Это обусловливалось расшатыванием основ рабовладельческого строя, ликвидацией последних остатков патриархальных форм рабства, ликвидацией управленческих, организаторских функций рабовладельцев, превращением последних в паразитирующий класс, презирающий всякий труд, в том числе и умственный.

Несмотря на это внутреннее противоречие, математика александрийской культуры, распространявшейся не только на Египет, но и на все эллинистические страны, представляла наивысшую ступень развития математики древнего мира. В особенности в первое время, в III в. до н. э., Александрия, собравшая отовсюду виднейших ученых, дала таких выдающихся математиков как Евклид, Эратосфен и Аполлоний Пергский. К числу этих ученых принадлежал и Архимед, несмотря на то, что он не покидал родных Сиракуз. По своему научному уровню, по широте охвата предмета и по глубокой обоснованности его трактовки, математика этого периода оставила далеко позади прежние, даже наивысшие достижения вавилонян, египтян и самих греков.

Евклид. Хотя попытки изложить важнейшие математические знания как известное целое в определенном порядке, связи и последовательности предпринимались уже Гиппократом Хиосским (около 450—430 гг. до н. э.), о котором Прокл писал, что «он в самом деле был первым, о котором сообщается, что он действительно составил «Начала», и хотя в IV в. до н. э. они продолжались Леоном, а затем Тевдием из Магнезии, лишь на долю Евклида выпало завершение этого труда. Как и о жизни большинства великих математиков древности, о жизни Евклида сохранились лишь весьма скудные сведения. Известно, что он жил в Александрии при Птолемее I, царствование которого падает на 306—283 годы до н. э. Прокл рассказывает, будто Птолемей спросил Евклида, нет ли более короткого пути для понимания геометрии, чем тот, который изложен в «Началах», на что Евклид ответил, что «в геометрии нет царской дороги» ([78], стр. 68). Полагают, что Евклид обучался геометрии в Афинах, но хотя большинство афинских геометров и были платониками, отсюда не следует, будто и Евклид был последователем Платона и тем более написал свои «Начала» только для того, чтобы увенчать их «платоновскими» правильными многогранниками, толкуемыми мистически.

Как рассказывает Папп (вторая половина II в. н. э.), Евклид основал в Александрии свою школу. Содержание «Начал» свидетельствует о большом уважении их автора к традиции, поскольку он сохранил в них некоторые уже вышедшие в его время из употребления понятия.

Хотя Евклид является автором ряда сочинений, в историю математики он вошел прежде всего как создатель «Начал», [92] по-гречески «Στοιχεῖα», что значит стихии, элементы (по-латыни это сочинение называется Elementa).

«Начала» Евклида состоят из 13 книг, в содержание которых входит прежде всего изучение геометрических фигур на плоскости и, поскольку для этого требуются числа, то и учение о целых (положительных) числах и дробях. Но так как отношение пространственных фигур не всегда выражается рациональными числами, то изучаются также несоизмеримые геометрические величины. Наконец, исследование распространяется с плоскости на пространство, на взаимоположение и величины поверхностей и объемов тел. Таким образом, в «Началах» излагались основы планиметрии, стереометрии и арифметики.

Главная особенность «Начал» в том, что они построены по единой логической схеме, что все содержащиеся в них теории строго логически обоснованы по принципу построения научных дисциплин, который намечался еще у Аристотеля.

Геометрическое предложение, если оно полно, состоит из шести частей: 1) формулировка в общих выражениях, 2) постановка, указывающая конкретные данные, как правило, изображенные в виде фигуры, 3) определение или указание (диорисмос), в котором со ссылкой на конкретные данные указывается, что требуется сделать или доказать, 4) построение, в которое входят добавления, требуемые сделать к фигуре, чтобы иметь возможность получить доказательство, 5) само доказательство, 6) заключение, которое возвращается к формулировке и так же как и она высказывается в общих выражениях. Заключение не зависит от частной фигуры, являющейся лишь представителем целого класса таких фигур. В некоторых предложениях могут отсутствовать некоторые из этих шести частей. Иногда необходимо добавить еще один «диорисмос», — в смысле указания условий возможности.

«Начала» справедливо считаются образцом дедуктивной системы, строго выдерживающей изложение, исходящее из общих положений и идущее от них к частным. Однако это обстоятельство вовсе не означает, будто другой элементарный метод исследования, всегда неразрывно связанный с дедукцией, — индукция, — в «Началах» отсутствует. По мнению некоторых историков математики и философов — идеалистов, «Начала» построены без какой бы то ни было помощи индукции, «чисто дедуктивно». Однако индукция, движение от частного к общему, от единичных данных чувственного опыта к рациональному обобщению, к абстракции неизбежно участвовала в образовании основных понятий, их определений, постулатов и аксиом, равно как и в создании самого логического приема дедукции. Ведь все эти геометрические понятия и логические приемы возникли в результате многократно повторявшегося опыта как отражения предметов, свойств и связей действительного материального мира, существующего независимо от сознания. Более того, индукция входит в неявном виде в любое геометрическое доказательство и построение. Одни лишь определения, постулаты и аксиомы не способны подсказать ни что следует доказывать или строить, ни каким путем это можно осуществить. И на то и на другое нам указывает чувственная наглядность, как при прямом рассмотрении фигуры и построении вспомогательных линий, так и при помощи геометрической интуиции. Последняя не является врожденной таинственной сверхлогической способностью, а основывается на приобретенных навыках. Кроме того, разумеется, индуктивным является заключение от частного случая, например, от отдельного треугольника, для которого мы доказали ту или иную теорему, — к общему случаю, ко всем треугольникам вообще.

Так же как с дедукцией и индукцией, обстоит дело в «Началах» и с анализом и синтезом. Хотя «Начала» в явном виде не применяют аналитического метода сведе́ния неизвестного к известному, тем не менее без анализа невозможно было бы открытие доказательств. Анализ применяется всегда, когда мы переходим от определения к построению. Кроме того, такой распространенный в «Началах» метод доказательства как апагогический (сведе́ние к абсурду, или доказательство от противного) является разновидностью анализа.

К логической структуре «Начал» относятся также «случаи», «возражения», «следствия» и леммы. Под «случаем» понимается то, что предложение может принимать несколько разновидностей в зависимости от взаимного расположения элементов фигуры. «Возражение» может встретиться как раз тогда, когда опущено указание на возможные другие случаи. Это, как правило, встречается у древних, которые, зная о существовании этих случаев, приводили все же лишь один случай, предоставляя ученикам находить и разбирать остальные. «Следствие» или королларий (порисма) — это побочная теорема, найденная как бы невзначай в процессе доказательства основного доказуемого положения. Наконец, под леммой понималось вспомогательное положение, нужное для доказательства, либо ранее доказанное, либо, для того чтобы не нарушать хода доказательства основной теоремы, доказываемое после (что оговаривалось).

«Начала» Евклида начинаются с определений, постулатов и общих понятий.

Характер определений у Евклида различен. В большинстве они описательны, например, определение первое книги I: «Точка есть то, что не имеет частей» ([92], т. 1, стр. 11). Но наряду с описательными встречаются и номинальные (словесные) определения, вроде определения 19 книги I: «Прямолинейные фигуры суть те, которые содержатся между прямыми...» ([92], т. 1, стр. 12); генетические (указывающие на способ происхождения вещи), например, определение 14 книги XI: «Сфера будет, если при неподвижности диаметра полукруга, вращающийся полукруг снова вернется в то же самое <положение>, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура <и есть сфера>» ([92], т. 3, стр. 10) и, наконец, аксиоматические (т. е. такие, которые могут быть сформулированы в виде аксиом), например, определение 1 книги III: «Равные круги суть те, у которых диаметры равны или прямые из центра равны» ([92], т. 1, стр. 80). Очевидно, что описательные и номинальные определения не имеют отношения к выводам, которые делаются затем о предмете этих определений, они логически не действенны.

В то время как определения предпосланы почти каждой отдельной книге (кроме VIII, IX, XII и XIII), постулаты (числом пять) и общие понятия или аксиомы (девять) помещены впереди всего труда в первой книге. Постулаты — это требования построить некоторые простейшие фигуры, между тем как аксиомы — это общепризнанные положения, не нуждающиеся в доказательстве и лежащие в основе доказательства.

Этот взгляд на постулаты и аксиомы, разделявшийся переводчиком и комментатором «Начал» Д. Д. Мордухай-Болтовским, исходит из того, что это сочинение не являлось чисто логическим, а намеренно содержало чувственно-наглядные моменты. Евклид стремился убедить читателя не только при помощи формально логических выводов, но и при помощи построений, прибегая к линейке и циркулю, что соответствовало взглядам тяготевших к материализму «старших» софистов, последователей Протагора. Противоположный взгляд, встречающийся у издателя греческого текста «Начал» Гейберга, исходит из того, что будто Евклид приписывал, подобно Платону, геометрическим объектам идеальное существование, а поэтому признавал лишь логическую очевидность, а отнюдь не общезначимость, которая может опираться и на наглядное представление. Не случайно, что материалист Гоббс в сочинении «О теле» (1655 г.) указывает, что постулат является основой не доказательств, а построений, не знания, а возможности существования, между тем как идеалисты-рационалисты, в особенности Лейбниц, считали постулаты лишь разновидностью логических аксиом, взгляд, которого придерживаются и современные позитивисты, считающие при этом аксиомы условными соглашениями.

Построения, допускаемые постулатами, предполагают линейку без делений, не допускающую измерения расстояний. Линейкой можно пользоваться лишь для соединения двух точек или продолжения отрезка. Отсутствие меток на линейке не давало возможности пользоваться методом «вставок», хотя он применялся еще во времена Гиппократа Хиосского. Циркуль разрешалось употреблять только для описания из данной точки как из центра окружности с данным радиусом, а не для переноса данной длины. Постулаты «Начал» — это постулаты идеального циркуля и линейки, хотя прямого упоминания здесь о линейке и циркуле не содержится.

Ограничения, наложенные на употребление линейки и циркуля, были, по-видимому, связаны с тем, что эти инструменты заменили собой веревку, первоначально служившую как для проведения прямых, так и для описания окружностей. Правила, установившиеся для пользования веревкой, не допускавшие, при желании соблюдения точности построения, столь свободного обращения, которое возможно с жесткими инструментами, сохранились затем по традиции и тогда, когда инструменты сменили веревку. Эти ограничения не только усложнили производство построений, но главное, привели к тому, что в «Начала» не были включены те геометрические теории, которые требовали либо «вставок», либо других линий, кроме прямой и окружности. Именно поэтому здесь не излагалась теория конических сечений, хотя она была тогда уже хорошо развита. Но в «Начала» не вошла также и логистика, — учение о практических вычислениях, — так как она, как уже упоминалось, считалась скорее ремеслом, чем наукой. Многие историки математики объясняют произведенный Евклидом отбор материалов тем, что он, следуя Платону, и вместе с ними пифагорейцам, считал только прямую и круг «совершенными» линиями и не допускал «вставку» как механическое движение, чужеродное геометрии, имеющей дело лишь с идеальными объектами. Однако Евклид вовсе не пренебрегал изучением конических сечений, а написал о них отдельное сочинение. Что же касается «вставки», то механическое движение, которое требуется для ее осуществления, принципиально ничем не отличается от механического движения, требующегося для соединения двух точек прямой, и оба действия существенно не отличаются и по точности. Отпадает и предположение, будто «вставки» не были включены в «Начала» потому, что для доказательства проводимых с их помощью построений требуются знания, выходящие за пределы «Начал». Для доказательства трисекции угла при помощи «вставки» не требуется других знаний, кроме содержащихся в «Началах», несмотря на то, что алгебраически решение этой задачи приводит к уравнению третьей степени.

Постулаты и аксиомы Евклида. Первые три постулата гласят: «Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию»; «И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой»; «И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг» ([92], т. 1, стр. 14). Эти постулаты предполагают, что линейка и циркуль идеальны, обладают бесконечной длиной или раствором, позволяют строить идеальные прямые и окружности. Четвертый постулат выдвигает требование равенства всех прямых углов между собой, положение, которое теперь не считается постулатом, а доказывается. Пятый постулат гласит: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» ([92], т. 1, стр. 15). Смысл пятого постулата заключается в том, что точка пересечения двух прямых считается построенной, если при пересечении третьей прямой внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых. Этот постулат получил название постулата о параллельных. Его, или какой-то равносильный ему, пытались, по свидетельству Аристотеля [1]), доказывать еще за сто лет до Евклида. При этом, однако, допускали логическую ошибку petitio principi, неявно используя положение, равносильное доказываемому, на что указывал Аристотель. Эти попытки продолжались затем на протяжении двух тысячелетий, пока гениальный русский математик Н. И. Лобачевский в 1826 г. не создал свою неевклидову геометрию, из которой вытекало, что пятый постулат доказать нельзя.

Первые шесть аксиом, пользуясь алгебраической записью, можно выразить так: 1. Если $A = C$ и $B = C$, то $A = B$; 2. Если $A = B$, то $A + C = B + C$; 3. Если $A = B$, то $A - C = B - C$; 4. Если $A \neq B$, то $A + C \neq B + C$; 5. Если $A = B$, то $2A = 2B$; 6. Если $A = B$, то $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$. Разумеется, что у Евклида они выражаются словами. При этом здесь имеются в виду геометрические величины — линии, поверхности и тела, — а не отвлеченные числа. Аксиома 7 гласит: «И совмещающиеся друг с другом равны между собой» ([92], т. 1, стр. 15), что Евклид понимал в том смысле, что если фигуры при наложении совпадают, то они равновелики, т. е. имеют равные площади. Приняв эту аксиому, Евклид, по-видимому, отдал дань давней традиции, так как применение наложения встречалось, должно быть, еще у Фалеса. Но Платон и Аристотель считали, что «математические науки чужды движению». И хотя сам Евклид применял движение (например, в определении шара), он все же старался избегать его, как непоследовательное отступление. Аксиома 8: «И целое

---

[1]) См. выше, стр. 122.

больше части» и аксиома 9: «И две прямые не содержат пространства», вероятно, имеют более позднее происхождение.

Планиметрические книги «Начал». Первую часть «Начал» — учение о равенстве фигур на плоскости — излагают первые четыре книги. Первая начинается с 23 определений. Определение 1: «Точка есть то, что не имеет частей», является отрицательным определением, говорящим лишь о том, чем точка не является, а не о том, чем она есть, вследствие чего под это определение подходит любой неделимый предмет. Это определение Евклида отличается от определения точки, данного Аристотелем, тем, что Евклид отбросил слова «наделенное положением», вследствие чего уничтожил разницу между точкой и единицей. Определение 2: «Линия же — длина без ширины», выражает одномерность линии. Определение 3: «Концы же линии — точки», собственно, является аксиомой, высказанной об уже определенных точке и линии, а не новым определением точки. Определение 4: «Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней», по-видимому, означает, что прямая сохраняет все свои свойства, в том числе и направление для любой своей точки. Определения 5, 6 и 7 аналогичны предыдущим трем, определяя поверхность, линии как концы поверхности и плоскость. Определения 8—12 касаются углов, причем угол определен как «наклонение друг к другу двух линий», пересекающихся в плоскости. Определение 13: «Граница есть то, что является оконечностью чего-либо», означает: то, что ограничивает что-либо, вполне его определяя, является в нем самым крайним. В определении 14 фигура определяется как часть плоскости, содержащаяся внутри какой-нибудь границы. Определения 15—18 касаются круга, его центра, диаметра и полукруга, причем окружность определяется как линия, все точки которой равно отстоят от центра, хотя проще было бы получить круг вращением прямой вокруг неподвижной точки. Определения 19—22 говорят о прямолинейных фигурах, выделяя особо различные виды треугольников и четырехугольников. От принятой здесь классификации Евклид частично отступает в стереометрических книгах «Начал». Наконец, определение 23 гласит: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой <стороны> между собой не встречаются». В отличие от других, это определение не может быть проверено, так как оно требует знания неограниченной плоскости, между тем как наши знания охватывают всегда лишь ограниченную ее часть. Это обстоятельство, должно быть, как раз и послужило толчком для поисков создания теории параллельных и попыток доказательств.

Книга I состоит из 48 предложений, которые распадаются на три группы. Первая (предложения 1—26) посвящена главным образом треугольникам и перпендикулярам. Во второй группе (предложения 27—32) дана теория параллельных, которая в последнем предложении этой группы применена к доказательству того, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Третья группа (предложения 33—48) занимается параллелограммами, квадратами и треугольниками, сравнивая по площади равновеликие, но не равные фигуры. Два последних предложения книги I содержат доказательство так называемой теоремы Пифагора и обратной ей теоремы. Доказательство прямой теоремы, которое, по свидетельству Прокла, принадлежит самому Евклиду, построено на равновеликости треугольников с равными основаниями и равными высотами.

Книга II, самая короткая из всех, содержит 14 предложений, которым предпосланы два определения, где вводится уже известное нам понятие гномона. Эта книга, являющаяся продолжением третьей части первой книги, представляет собой геометрическую алгебру греков. В предложениях, например, $ab + a(a - b) = a^2$; $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$, произведения отрезков — это не произведения чисел, а площади прямоугольников, «заключенных между отрезками», т. е. имеющих эти отрезки своими сторонами.

Книга III, состоящая из 37 предложений, целиком посвящена учению о круге. Ей предпослано 11 определений, в которых вводятся понятия касательной (как прямой встречающей, но не пересекающей круг), касания двух кругов и др. Среди предложений третьей книги обращает на себя внимание предложение 16, где рассматривается угол между окружностью и касательной, т. е. «роговидный» угол, и доказывается, что он меньше любого прямолинейного острого угла; к смешанным углам Евклид прибегает еще лишь один раз, в предложении 31.

В книге IV, состоящей из 16 предложений, Евклид рассматривал фигуры, вписанные в круг или описанные около него, введя предварительно эти понятия в семи определениях. Интересно отметить, что из правильных многоугольников, вписанных в круг, кроме построений квадрата, пятиугольника (при помощи золотого сечения) и шестиугольника, указано также построение правильного пятнадцатиугольника. Эта задача возникла в астрономии, так как угол наклона эклиптики к экватору считался равным $\frac{1}{15}$ полного угла (на деле он равен около 23°27′).

Теория пропорций и арифметические книги «Начал». Если первые четыре книги по возможности исчерпали вопросы равенства отрезков и площадей, то книги V и VI изучают их неравенство, поскольку оно может быть измерено. В основу положено учение о пропорциях, подробно разработанное Евдоксом, но систематически изложенное Евклидом в 25 предложениях книги V. В начале идут 18 определений, из которых большинство касается разного рода отношений и пропорций.

Евклид изображает величины отрезками, отношения которых, поскольку не существовало понятия иррационального числа, не могут в общем случае быть выражены в числах. Предложения книги V легко записать в современных обозначениях. Если обозначим через $A, B, C, \ldots$ величины, а через $m, n, p\ldots$ — целые положительных числа, то предложение 1, например, гласит: $mA + mB + mC + \ldots = m(A + B + C + \ldots)$, предложение 6: $mA - nA = (m - n)A$ и т. д. Так, последнее, 25 предложение, мы записали бы так: если $A : B = C : D$ и $A > B > C > D$, то $A + D > B + C$.

Книга VI, состоящая из 33 предложений, занимается приложением учения о пропорциях к планиметрии. Ее открывают пять определений, два из которых, вероятно, были прибавлены позже; остальные три вводят понятия подобия фигур, деления отрезка в крайнем и среднем отношении (золотое сечение) и высоты фигуры, под которой понимается перпендикуляр, опущенный на основание из точки, наиболее отдаленной от него. В определении 5, которое гласит: «Говорится, что отношение **составляется** из отношений, когда количества этих отношений, перемноженные между собой, образуют нечто» ([92], т. 1, стр. 174), в неясном виде введено понятие составного отношения, под которым понимают отношение $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} : \frac{B}{C}$. Так как Евклид нигде не обращается с отношениями как с числами, он не может говорить и об умножении отношений. Следовательно, определение 5 надо считать более поздней вставкой. Из критики, вызванной этим определением, выросла идея расширения понятия числа до действительного числа. Составные отношения широко использованы в античной геометрии. Из предложений особо выделяется предложение 27: «Из всех параллелограммов, приложенных к той же прямой и имеющих недостаток в виде параллелограммов, подобных и подобно расположенных <параллелограмму>, построенному на половине, наибольшим будет <параллелограмм>, приложенный к половине и подобный своему недостатку» ([92], т. 1, стр. 208). Это предложение является исторически первым, содержащим упоминание максимума; мы записали бы его так: выражение $x(a-x)$ принимает максимальное значение для $x=\frac{a}{2}$. Предложение 31 обобщает теорему Пифагора на любые прямолинейные подобные фигуры, построенные на сторонах прямоугольного треугольника. В целом книга VI содержит материал, известный уже до Евклида, однако изложенный с помощью новой теории — теории пропорций.

Три следующие книги «Начал» — VII, VIII и IX — являются арифметическими книгами. В то время как книга V занималась лишь арифметическими действиями, здесь разрабатывается теоретическая арифметика, сосредоточены основные знания о целых числах, накопившиеся ко времени Евклида. Как это убедительно показала И. Г. Башмакова [101], Г. Цейтен и некоторые другие историки математики недооценили значение этих книг и не поняли, что они представляют необходимую предпосылку к книге X, излагающей теорию иррациональностей. Первая книга, включающая 39 предложений, открывается 23 определениями, на этот раз относящимися ко всем трем книгам. Здесь даны определения единицы, числа, разных видов чисел — четных, нечетных, четно-четных, четно-нечетных, нечетно-нечетных, затем простых, взаимно простых, составных и взаимно составных (т. е. имеющих общий делитель), кратных, плоских, телесных, квадратных, кубических, подобных квадратных и подобных кубических. Здесь также вводится понятие «часть» («Часть есть число в числе, меньшее в большем, если оно измеряет большее»), например, отрезок, равный двум, есть «часть» отрезка, равного шести, затем понятие «части» — этот же отрезок является не «частью» отрезка, равного пяти, а его «частями» $\left(\text{т. е. } \frac{5}{6}\right)$ и, наконец, понятие совершенного числа, как такого, которое равно сумме своих «частей» (в нашем понимании — делителей). Заметим, что определение единицы, как «то, что через что каждое из существующих считается единым», крайне неясно. Евклид, как и вообще древние, не считает единицу числом, а потому вынужден всякое предложение, верное для чисел, особо доказывать для единицы. Из определения числа как множества, составленного из единиц, ясно, что Евклид понимает под «числом» лишь целое число (дроби он не считает числами) далее, что это количественное, а не порядковое число, и наконец, что под «множеством» он понимает просто конечную совокупность. При этом числа Евклид понимает не отвлеченно, а как числа-отрезки, являющиеся, как бы мы сказали, целочисленными кратными единичного отрезка.

Предложения книги VII распадаются на четыре основные группы. Первая (предложения 1—3) учит, как найти наибольшую общую меру (в нашем понимании — наибольший общий делитель) двух или трех чисел. Здесь применяется алгоритм (т. е. конечная система правил вычисления для решения однотипных задач), получивший название алгоритма Евклида, которым мы пользуемся для этой цели и поныне, с той лишь разницей, что Евклид применяет не деление отвлеченных чисел, а повторное вычитание чисел-отрезков. Во второй группе предложений (4—19) развита арифметическая теория пропорций. Например, в предложениях 17, 18 и 19 доказываются теоремы $\frac{AB}{AC}=\frac{B}{C}$, $\frac{BA}{CA}=\frac{B}{C}$; если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, то $AD = BC$, и обратно. Последнее предложение связывает эту арифметическую теорию с теорией пропорций книги V. В предложениях 23—32 рассматриваются основные положения теории делимости. Предложение 31: «Всякое составное число измеряется каким-то первым числом» Евклид доказывает методом, получившим в дальнейшем название метода спуска. Он состоит в следующем: если A — сложное число, то существует число B, являющееся делителем A. Если B — простое число, то теорема доказана. Если же B — сложное число, то существует число C, являющееся делителем B. Повторяя этот процесс, получаем ряд чисел A, B, C, ..., из которых каждое, начиная с B, является делителем предыдущего, а следовательно, $A > B > > C > \ldots$ Но отсюда следует, что мы через конечное число шагов дойдем до делителя всех предыдущих чисел, а значит, и числа A, т. е. до простого числа P. Ведь в противном случае последовательность A, B, C,... была бы бесконечной, что невозможно, ибо тогда, как пишет Евклид, «число A будет измеряться бесконечным рядом чисел, из которых каждое будет меньше; это же невозможно для чисел». Метод спуска был надолго забыт, им стали пользоваться вновь лишь в XIII в.

Книга VIII, состоящая из 27 предложений, занимается «непрерывными пропорциями», иначе говоря, геометрической прогрессией.

Девятая, завершающая арифметическая книга, состоит из 36 предложений. Из них предложения 14—20 относятся к теории простых чисел. Первое из них гласит: «Если число будет наименьшим измеряемым ⟨данными⟩ первыми числами, то оно не измерится никаким иным первым числом, кроме первоначально измеривших ⟨его⟩» ([92], т. 2, стр. 83). Этим выражена основная теорема теории простых чисел о единственности разложения составного числа на простые множители. Евклид принимает $A = BC$, где B, C — простые числа и, предположив, что существует отличное от B, C простое число E, на которое делится A, показывает, что это предложение приводит к противоречию. Как отмечает И. Н. Веселовский в комментариях к русскому переводу «Начал» ([92], т. 2, стр. 337), Евклид берет лишь три простых множителя и не рассматривает случая, когда они входят в высших чем первой степенях, потому, что греки признавали только плоскостные и телесные числа. Предложение 20, известное как предложение о существовании бесконечного множества простых чисел, гласит: «Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел» ([92], т. 2, стр. 89). Доказательство Евклида ведется от противного: Если допустить, что A, B, C — простые числа, то их произведение, увеличенное на единицу $(ABC + 1)$, либо будет простым числом, и в этом случае количество простых чисел не ограничивается предложенными, либо оно не будет простым, и тогда должно делиться на какое-то простое число H. Однако число H не может совпадать ни с одним из чисел A, B, C, ибо, если бы оно совпадало, например с A, и так как оно является делителем и для числа $ABC + 1$ и для числа ABC, то оно должно было бы быть и делителем единицы, что нелепо. Следовательно, кроме A, B, C и число H является простым. Это предложение Евклида отвечало на вопрос, возникающий при эмпирическом рассмотрении натурального ряда чисел: чем дальше, простые числа попадаются в нем все реже, поэтому естественно заподозрить, что имеется какое-то наибольшее простое число.

Предложение 35 решает задачу суммирования геометрической прогрессии, которую Евклид, в переводе на язык алгебры, решает так:

пусть A_{n+1}, A_n, A_{n-1}, ..., A_1 члены такой прогрессии; тогда

$$A_{n+1} : A_n = A_n : A_{n-1} = \ldots = A_2 : A_1,$$

а следовательно, и

$$(A_{n+1} - A_n) : A_n = (A_n - A_{n-1}) : A_{n-1} = \ldots = (A_2 - A_1) : A_1.$$

Отсюда, по ранее доказанному свойству пропорции, получаем

$$(A_{n+1} - A_1) : (A_n + A_{n-1} + \ldots + A_1) = (A_2 - A_1) : A_1.$$

Последнее, 36-е предложение, выводит формулу для совершенных чисел: $2^{p-1}(2^p - 1)$ — совершенное число, если p и $(2^p - 1)$ — простые числа. Евклид не доказывает, что всякое четное совершенное число имеет этот вид — это было доказано значительно позже. Нечетные совершенные числа пока не найдены, но пока и не доказано, что они не существуют Древние знали только четыре совершенных числа (для $p = 2$ 3, 5, 7); пятое совершенное число для ($p = 13$), равное 33 550 336, было найдено в XV в. В настоящее время всего известно 17 совершенных чисел для $p = 2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281. Девятое совершенное число, имеющее 37 цифр, найдено в 1883 г. русским математиком-самоучкой священником И. М. Первушиным; последние два совершенных числа, имеющие соответственно 1326 и 1372 цифры, были найдены в 1953 г. при помощи быстродействующих электронных вычислительных машин.

Остановимся более подробно на теории пропорций Евклида, которая в «Началах» строится дважды: для непрерывных величин в книге V и отдельно для соизмеримых величин и целых чисел в книге VII.

Две пары соизмеримых величин или чисел A, B и C, D образуют пропорцию, если имеет место какой-нибудь из трех случаев:

1) $$A = nB \quad \text{и} \quad C = nD,$$

2) $$nA = B \quad \text{и} \quad nC = D,$$

3) для некоторых величин N и M, если одновременно $A = mN$, $B = nN$ и $C = mM$, $D = nM$ или, если пользоваться дробями, чего Евклид не делает, $A = \frac{m}{n}B$ и $C = \frac{m}{n}D$.

Сам Евклид говорил в первом случае, что A и C равнократны B и D, во втором, что A и C являются одной и той же частью B и D, и в третьем, что A и C суть одинаковые «части» B и D.

В книге X определение пропорции распространяется на соизмеримые и непрерывные величины, т. е. доказывается, что такие величины относятся как числа и, наоборот, что величины, находящиеся в числовом отношении, соизмеримы.

В теории отношений основную роль играет алгоритм отыскания общей наибольшей меры. В частности, этот алгоритм придает реальный смысл самому определению «части» и «частей». Алгоритм Евклида можно непосредственно использовать для определения пропорциональности четырех чисел. Отношения $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ образуют пропорцию тогда и только тогда, когда все возникающие при отыскании наибольшей общей меры частные $q_0, q_1, \ldots, q_k$ для одной пары и соответственные частные $q'_0, q'_1, \ldots, q'_{k'}$ для другой пары равны, т. е. $k = k'$ и $q_j = q'_j$. Другими словами, равенство числовых отношений можно определить равенством всех соответственных неполных частных разложений $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ в непрерывные дроби. У Евклида об этом нет и речи, но весьма вероятно, что такое естественное определение, связанное с процессом измерения, существовало в греческой математике до Евдокса.

Определение одинаковости отношений двух пар непрерывных величин A, B и C, D, удовлетворяющих аксиоме Евдокса—Архимеда, существенно отлично. Алгоритм Евклида в нем не предполагается (на непрерывные величины он распространяется в книге X). В определении сравниваются некоторые кратные данные четырех величин. Согласно Евклиду непрерывные величины A, B и C, D находятся в одинаковых отношениях, если для любой пары натуральных чисел m, n, для которой выполняется какое-либо из трех условий:

1) $nA < mB$,
2) $nA = mB$,
3) $nA > mB$,

вместе с тем выполняется и соответственное из условий

1′) $nC < mD$,
2′) $nC = mD$,
3′) $nC > mD$.

Это определение равенства отношений вполне в духе современной нам математики; к тому же типу принадлежит определение иррациональных чисел Дедекинда. Определив равенство отношений отрезков A и B при помощи бесконечного множества неравенств, Евдокс и Евклид собственно разбивают множество рациональных чисел $\frac{m}{n}$ на два класса ($mA>nB$ и $mA<nB$ с $mC>nD$ и $mC<nD$), чему соответствует сечение Дедекинда. Конечно, рациональные дроби можно рассматривать как пары чисел (m, n), подчиненные некоторым законам операций. Важно заметить, вместе с тем, что рациональные дроби служат нам не только для абстрактного определения иррациональных чисел, но и для их приближения с любой степенью точности при вычислениях. В теории Евдокса—Евклида проблема приближения несоизмеримых соотношений не ставится в явном виде: сравниваются между собой некоторые кратные членов обоих отношений, но не сами отношения $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ с отношениями целых чисел $\frac{m}{n}$. Характерно, что Евклид говорит не о равенстве отношений,

а об их одинаковости, особо доказывая, что одинаковость подобно равенству обладает свойством транзитивности: два отношения, одинаковые с третьим, одинаковы между собою. Понятие равенства Евклид относит лишь к величинам и числам, а отношения это не величины и не числа.

Различение чисел как множеств единиц, и отношений чисел или величин, было в классической античной математике не просто терминологическим. Оно обусловливалось той функцией, которую выполняла теория отношений. Теория отношений целых чисел возникла из практики действий с дробями, но применена была к исследованию свойств целых чисел. Общая теория отношений лежала в основе учения о подобии и метода исчерпывания. И хотя в некоторых вопросах она играла ту же роль, что в современном анализе играют действительные числа, она все-таки не использовалась или почти не использовалась в вычислениях. Показательно, что в книге VII не рассматривается сложение и вычитание отношений, а в книге V эти операции вводятся только для нужного далее частного случая отношений с последующим общим членом. Лишь в позднейшем развитии греческой математики началось приспособление теории отношений к задачам вычислительной математики, а дроби (но не иррациональности) стали называть числами.

Книга X «Начал». Третья часть всего труда Евклида целиком содержится в наибольшей по объему, замечательной, но и весьма трудной и наименее изученной книге X. Эта книга, содержащая 115 предложений, которым предпосланы четыре определения, содержит классификацию иррациональностей, получаемых при решении квадратных и приводящихся к квадратным биквадратных уравнений с рациональными коэффициентами. Вначале дано определение соизмеримых и несоизмеримых величин, затем величин, соизмеримых в степени (квадраты которых соизмеримы) и несоизмеримых в степени, причем все эти понятия относятся к геометрическим величинам, а не к числам. Далее Евклид называет заданную прямую рациональной, и соизмеримые с ней отрезки (как линейно, так и в степени) — рациональными, а несоизмеримые с ней — иррациональными. Следовательно, рациональными отрезками он считает не только те, которые в нашем смысле являются рациональными кратными данного отрезка A, например nA (где n — рациональное число), но и отрезки вида $n\sqrt{A}$, поскольку отрезки могут быть измеримы в степени. Но если B — площадь, то рациональными будут лишь площади nB, так как площади не могут быть соизмеримы в степени, ибо квадрат площади не имеет геометрического смысла. Соизмеримости величин посвящены первые 18 предложений. Предложение 9, прозванное теоремой Теэтета, равносильно утверждению, что корень из неточного квадрата не может выражаться соизмеримым числом. Предложения 10—16 изучают соизмеримость и несоизмеримость величин на основании каких-либо данных отношений связанных с ними других величин. Они подготовляют предложения 17—18, доказывающие, выражаясь современным языком, что корни квадратного уравнения $ax - x^2 = \frac{b^2}{4}$ соизмеримы или несоизмеримы с a в зависимости от того, соизмеримо или несоизмеримо с a выражение $\sqrt{(a^2 - b^2)}$. С предложений 19—21 начинается вторая часть книги X. Эти приближения посвящены прямоугольникам: если стороны прямоугольника линейно соизмеримы, то он рационален, если же его стороны соизмеримы только в степени, то он иррационален. Сторону квадрата, равновеликого иррациональному прямоугольнику, Евклид называет медиалью; этим вводится первое понятие классификации иррациональностей, принадлежавшей Теэтету.

В результате подробного рассмотрения получается всего 13 видов иррациональностей. Все они являются положительными корнями уравнений $(x^2 \pm 2ax) \cdot (c \pm b \cdot c^2) = 0$ или $(x^4 \pm \pm 2ax^2) \cdot (c^2 \pm b \cdot c^4) = 0$, где c — рациональный отрезок, a и b — коэффициенты, в зависимости от свойств которых положительные корни первого уравнения являются биномиалями и вычетами одного из шести родов, а положительные корни второго — остальными двенадцатью иррациональностями.

Труд классификации иррациональностей был предпринят потому, что решения задач, приводящих к квадратным и сводящихся к ним биквадратным уравнениям, нельзя было выразить при помощи рациональных чисел и заданных отрезков. Поскольку у греков отсутствовала возможность алгебраической записи, им приходилось давать словесное выражение результатам решения уравнений, которые иначе обозреть не было бы никакой возможности. Евклидова классификация далеко не охватывает все возможные иррациональности; не говоря уже об иррациональностях высших степеней, которые не были включены потому, что они не могли быть построены разрешенными приемами при помощи циркуля и линейки; эта классификация не включала и такие иррациональности, как например, «триномиаль» $\left(c + \sqrt{m}\, c \pm \sqrt{n}\, c\right)$.

Стереометрические книги «Начал». Книги XI, XII и XIII «Начал» посвящены стереометрии. Им предпослано 28 определений. Сначала дано определение тела, как «того, что имеет длину, ширину и глубину». Это определение, подобно определениям точки, линии и поверхности, данным в книге I, логически неэффективно; в дальнейшем на него нигде не ссылаются, не делают из него никаких выводов. Таково же и определение поверхности как границы тела. Затем даны определения прямой, перпендикулярной к плоскости, и двух перпендикулярных плоскостей; однако Евклид не доказывает, что эти перпендикулярные в самом деле существуют. Затем даются определения наклона, параллельных плоскостей, подобия и равенства (понимаемого в смысле равновеликости) телесных фигур (везде предполагаемых выпуклыми). Далее определяются пирамида, призма, сфера, конус, цилиндр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Сфера, конус и цилиндр здесь определены с помощью вращения, в отличие от круга в книге I. Эта непоследовательность является, по-видимому, результатом наслоения различных геометрических традиций.

Книга XI, состоящая из 39 предложений, в основном строится аналогично книге I. Она начинается так же, как обыкновенно начинаются и современные учебники стереометрии, с предложений о перпендикулярных и параллельных прямых и плоскостях, а также об образуемых прямыми и плоскостями углах. Затем исследуется параллелепипед и, наконец, призма.

Книга XII содержит 18 предложений, в которых применяется метод исчерпывания для доказательства отношений между объемами тел — пирамид, конусов, цилиндров, сфер.

Необходимо подчеркнуть, что Евклид нигде не дает вычисления площади круга или объема шара и т. п. Конечно, это происходит не потому, что ему не были известны давно существовавшие приближенные вычисления, а потому, что, как уже отмечалось, эти вычисления относили к практической геодезии, а не к теоретической геометрии.

Книга XIII, насчитывающая 18 предложений, частично возвращается к предмету книги IV, вписанным в круг правильным многоугольникам, в особенности к правильному треугольнику и пятиугольнику, чтобы затем перейти к задаче построения и «охватывания заданной сферой» каждого из пяти правильных многогранников: в предложении 13 — пирамиды (тетраэдра), в 14 — октаэдра, в 15 — куба, в 16 — икосаэдра и в 17 — додекаэдра. Понимая под выражением «охватить сферой» построение описанной сферы, Евклид выводит для первых трех случаев отношение между диаметром сферы и стороной (ребром) соответствующего многогранника; для остальных двух он указывает лишь, что сторона икосаэдра будет «меньшей» иррациональной, а сторона додекаэдра — вычетом. Предложение 18 сравнивает между собой длины ребер пяти правильных многогранников. Книга заканчивается добавлением, в котором доказывается, что кроме указанных пяти нельзя построить других правильных многогранников.

Из сравнения «Начал» с сохранившимися более ранними греческими математическими сочинениями или свидетельствами о них удалось установить те части этого труда, в которых Евклид использовал открытия своих предшественников, привел их в возможно более строгую логическую систему. Так, считается общепризнанным, что книга V и, вероятно, первые пять предложений книги XIII принадлежат Евдоксу. По-видимому, часть книги X происходит от Теэтета. Однако, тем не менее и эти книги сохраняют общий стиль «Начал», вплоть до слов «что и требовалось доказать» или «что и требовалось построить», которыми заканчиваются предложения, в зависимости от того, являются ли они теоремами или «проблемами», т. е. задачами на построение (слово «проблема» в латинских текстах «Начал» употребляется именно в этом значении). Как заметил М. Кантор ([21], 4-е изд., т. 1, стр. 276), эти заключительные формулы напоминают древнеегипетское «сделай так», которым регулярно заканчивались задачи в книге упражнений Ахмеса, а поэтому, возможно, они были переняты по традиции александрийскими геометрами, вместе со многими знаниями, у египтян. Следует учесть, что благодаря большому распространению «Начал» в древности, при списывании в них могли не только вкрасться описки, но и могли быть включены места, первоначально представлявшие примечания на полях переписчиков.

Подводя итоги, можно сказать, что хотя лишь в редких случаях имеются конкретные указания на то, что то или иное предложение или его доказательство являются результатом оригинального творчества самого Евклида, не может быть сомнения, что автор этого замечательного труда был великим геометром. Гигантская задача систематизации обширного разнообразного материала, которую он столь блестяще выполнил, сама по себе была под силу лишь крупнейшему ученому. Этот труд, являющийся одной из самых распространенных книг, выдержавших на протяжении более чем двух тысячелетий очень большое количество изданий в переводах на многочисленные языки, в сокращенных и переработанных вариантах, служит до сих пор, несмотря на громадное развитие, которое проделала за этот период геометрия, образцом для учебников элементарной геометрии, по которым ведется преподавание в средней школе. Его высокую оценку не может умалить то обстоятельство, что с современной точки зрения мы находим логические недостатки как в определениях, так и в особенности в системе аксиом. Эти недостатки не колеблют прочности оснований геометрии, построенной Евклидом в его бессмертном труде.

Нет сомнения, что одной из важнейших причин, обусловивших столь прочное, выдержавшее двухтысячелетнее испытание научное значение «Начал», были методологические взгляды их автора. Евклид считал, что геометрические фигуры существуют не в царстве идей, а лишь тогда, когда они могут быть построены (по крайней мере, в принципе, отвлекаясь от невозможности построения фигур сколь угодно большой величины); он доказывал их существование их построением и применял движение фигур — их наложение и вращение. Следовательно, вопреки утверждению некоторых историков математики[1]), Евклид в важнейшем вопросе, в вопросе о критерии истины, следовал не за Платоном, а за Аристотелем.

Евклиду также приписывались так называемые четырнадцатая и пятнадцатая книги «Начал», посвященные стереометрии, хотя он не являлся их автором. Первая была написана Гипсиклом, жившим около 200 г. до н. э., известным также сохранившимся астрономическим сочинением «О восхождении», первой книгой на греческом языке, применявшей вавилонское деление окружности на 360 градусов, автором не дошедших до нас работ о гармонии сфер и о многоугольных числах. Вторая из дополнительных книг «Начал», пятнадцатая, содержит упоминание об Исидоре, по-видимому, архитекторе Исидоре Милетском, одном из строителей храма св. Софии в Константинополе (около 532 г. н. э.). Здесь также рассматриваются правильные многогранники, однако эта книга написана на значительно более низком уровне, чем книга Гипсикла, состоит из трех плохо связанных друг с другом отрывков.

Другие сочинения Евклида. Как уже говорилось, Евклид оставил после себя не только «Начала», но и другие сочинения. Из чисто математических сохранились лишь два: «Данные» (латинское название «*Data*») [105] и «О делении фигур». Под «данным» Евклид понимает площади, отрезки, углы и отношения, если можно найти равные им. В отличие

---

[1]) См., например, статью М. Я. Выгодского [102]. Критика этой статьи дана В. Н. Молодшим [103] и Л. Е. Майстровым [104].

от этих «данных по величине», фигуры, образованные прямыми, будут «данными по виду», если даны их углы и взаимные отношения их сторон. Точки, линии и прямые «даны по положению», если они «всегда занимают то же самое место», что далеко не ясно. После определений следуют 95 предложений, в которых доказывается, что если даны определенные геометрические объекты, то тем самым даны и другие. «Данные» представляют собой своего рода собрание повторений к первым шести книгам «Начал».

С именем Евклида связывается также одна задача, содержащаяся в арифметических эпиграммах греческой антологии начала IV в. н. э., сводящаяся к решению линейного уравнения с одним неизвестным. Она гласит:

«Мул и осел под вьюком по дороге с мешками шагали.
Жалобно охал осел, непосильною ношей придавлен.
Это подметивший мул обратился к сопутчику с речью:
«Что ж, старина, ты заныл, и рыдаешь, будто девчонка?
Нес бы вдвойне я, чем ты, если б отдал одну ты мне меру,
Если ж бы ты у меня лишь одну взял, то мы бы сравнялись,
Сколько нес каждый из них, о геометр, поведай нам это».

Установить, принадлежит ли стихотворная форма этой задачи в самом деле Евклиду, конечно, невозможно. Однако, вероятно, что некоторым задачам придавалась форма загадок, хотя они могли, конечно, решаться и строго геометрически. В данном случае, если M — отрезок, измеряющий груз мула, то $(M-1)$ равно грузу осла, увеличенному на 1, а следовательно, первоначальный груз осла был $M-2$; с другой стороны, $M+1$ должно быть в два раза больше, чем груз осла, уменьшенный на 1, т. е. чем $M-3$; таким образом, мы получаем $M+1=2(M-3)=2M-6$, откуда груз мула $M=7$, а значит, груз осла $M-2=5$.

Второе произведение «О делении фигур», которое упоминает Прокл, указывая, что оно было посвящено делению фигур на фигуры либо одинаковой, либо неодинаковой формы, не дошло до нас в греческом оригинале, а только в поздних арабских и латинских переводах.

О сочинении Евклида «Ложные умозаключения» сохранилось лишь сообщение Прокла, указавшего, что в нем разобраны различного рода ложные умозаключения, которые проиллюстрированы на конкретных примерах. Это произведение предназначалось для начинающих изучать «Начала».

Другая не дошедшая до нас книга Евклида — это «По́рисмы», о которых, как о состоявших из трех книг и содержащих 171 предложение и 38 лемм, сообщает Папп, а также Прокл. В данном случае под «порисмами» следует понимать неполные предложения, высказанные о связях между геометрическими объектами, допускающими те или другие изменения своих характеристик, благодаря чему возникает необходимость что-то доказать или построить. В дальнейшем под «по́рисмами» стали понимать лишь такие предложения, которые, выражаясь современной нам терминологией, касались геометрических мест точек. Следует, однако, иметь в виду, что древние считали, что линия является только местом, где лежат точки, но не состоит из них, между тем как для нас «геометрическое место точек» — это связное «множество точек». Таким образом, под изменением характеристик геометрических объектов стали подразумевать исключительно лишь изменение местоположения точек. Как сообщает Папп, в сочинении рассматриваются лишь случаи, когда геометрическим местом является прямая или окружность[1]).

Третьей не сохранившейся геометрической работой Евклида являются «Конические сечения», о которых также упоминает Папп. Имеются основания полагать, что в этом сочинении, состоявшем из четырех книг, Евклид систематизировал и, возможно, пополнил знания об этом предмете, накопленные до него в объеме первых трех книг Аполлония, причем работе Евклида предшествовала также потерянная работа Аристея.

Четвертая потерянная работа Евклида, упоминаемая Проклом и Паппом, — из области теоретической геометрии. Это его двухтомные «Места на поверхности». Неясно, посвящены ли они кривым (коническим сечениям, а возможно, и спиралям) на поверхности конуса и цилиндра, или же поверхностям вращения, или и тому и другому.

Сохранились некоторые сочинения Евклида из области прикладной математики. Сюда относятся астрономические «Феномены», содержавшие математическую часть «Сферику» — геометрию шаровой поверхности, ранее разработанную Автоликом Питанским, и еще раньше в зачатках — Евдоксом. Значительный интерес представляет сочинение «Оптика», подтверждающее, что его автор вовсе не был платоником, которому были чужды практические применения. В этом сочинении излагаются основы перспективы, причем в основу теории зрения положен распространенный тогда взгляд, будто прямолинейные лучи света, образуя конус, исходят из глаза и ударяются о предмет; основанием конуса служат контуры предмета. Большинство предложений изучает

---

[1]) По поводу порисмов и данных у Евклида см. работу Д. Д. Мордухай-Болтовского [106].

случаи, при которых равные или неравные фигуры мы видим как равные или же как неравные. Однако здесь имеются также предложения о нахождении высоты предмета по его тени и с помощью применения зеркал.

Приписываемое Евклиду сочинение «Катоптрика» (учение о зеркальном отражении) было составлено значительно позже, вероятнее всего, Теоном Александрийским. Два сочинения по музыке, якобы написанные Евклидом, вряд ли могут быть признаны за его собственные произведения. Арабские источники называют Евклида также автором сочинений по механике. Однако решить, принадлежат ли Евклиду сохранившиеся в арабском и средневековом латинском переводах отрывки механических трактатов («О тяжелом и легком», «О рычаге» и др.), не удалось.

Аристарх Самосский. Об учениках Евклида, о Кононе Самосском и его ученике Досифее, сохранились лишь упоминания. Непосредственно к этому поколению ученых примыкал Аристарх Самосский (около 310—230 гг. до н. э.), известный как выдающийся астроном, но бывший и недюжинным математиком. Аристарх, учивший, что Земля вращается вокруг своей оси и обращается вокруг Солнца, что размеры сферы неподвижных звезд во столько раз превышают размеры круга, по которому движется Земля, во сколько периметр последнего превышает его центр, был обвинен в безбожии и должен был покинуть Афины. Эти идеи позднее развивали индийский математик Ариабхатта (род. в 476 г.), хорезмийский математик ал-Бируни (973—1048 гг.) и польский астроном Коперник (1473—1543 гг.), создатель гелиоцентрической системы.

По свидетельству Архимеда, Аристарх определил угол, под которым виден диаметр Солнца, как равный $\frac{1}{720}$ части круга Зодиака, т. е. $\frac{1}{2}$ градуса (по современным данным $31'59''$, $3\pm0''$, 1); возможно, что он достиг этого прекрасного результата при помощи изобретенного им прибора «скафэ» — своего рода усовершенствованных солнечных часов. Из его трудов до нас дошло сочинение «О размерах и расстояниях Солнца и Луны». Оставляя его астрономическую сторону, мы отметим, что это сочинение построено логически последовательно, представляя собой в математическом отношении первое сохранившееся сочинение на греческом языке, занимающееся вопросами, которые мы теперь относим к тригонометрии. Правда, Аристарх не вычисляет тригонометрических функций, от которых зависят искомые отношения между размерами и расстояниями, а довольствуется тем, что указывает границы, между которыми лежат значения этих функций. Делает он это исходя из следующих двух предложений, которые он не доказывает, по-видимому, потому, что они тогда были математикам общеизвестны:

1. Если α — угол, измеряемый в радианах, причем $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то отношение $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ уменьшается, а отношение $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$ возрастает, когда α возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

2. Если β — другой угол, измеряемый в радианах, причем также $\beta < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

Разумеется, у Аристарха нет радианов, синусов и тангенсов, а имеются углы, которые измеряются дробными частями прямого угла, дуги окружности, их хорды и касательные. Разумеется также, что Аристарх не пользуется формулами, а дает своим положениям словесное выражение.

Архимед. Период эллинизма дал величайшего математика и механика Архимеда (около 287—212 гг. до н. э.). Архимед родился в Сиракузах на о-ве Сицилии, где и развивалась его научная деятельность. Согласно Цицерону, Архимед был «человеком низкого положения» (humilis homunculus), жил бедно, хотя возможно, что и находился в отдаленном родстве с правившим Сиракузами Гиероном. Образование Архимед получил у своего отца, астронома и математика Фидия. а позже в Александрии, где сблизился с учениками Евклида, и после возвращения на родину обменивался с ними письмами по научным вопросам. Часть этих писем сохранилась. Была написана биография Архимеда неким Гераклидом, возможно, его другом; однако она не дошла до нас.

По сведениям из различных, более поздних, источников известно, что Архимед широко применял свои знания на практике, прежде всего, как рассказывает римский историк Тит Ливий, для поднятия экономики и обороны родного города. Им была изобретена водоподъемная машина («Архимедов винт») для орошения полей, открыт носящий его имя закон гидростатики, согласно которому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, направленная вверх и равная весу вытесненной жидкости; этот закон был применен Архимедом для определения состава сплавов путем взвешивания их в воде. Архимед применял системы рычагов, блоков, полиспастов и винтов для поднятия больших тяжестей, для постройки военных метательных машин.

Во время второй Пунической войны Архимед, примыкавший к демократической партии, которая, отстаивая самостоятельность Сиракуз, искала в борьбе против Рима союза с Карфагеном, возглавлял оборону города во время его двухлетней осады, причем столь успешно, что римскому полководцу Марцеллу удалось взять город в 212 г. до н. э. лишь благодаря внезапному коварному нападению с суши. Во время штурма римский солдат убил Архимеда, по преданию, чертившего на песке геометрические фигуры и заявившего: «Не трогай моих кругов!». На гробнице Архимеда, забытой и вновь найденной Цицероном, были изображены шар и описанный около него цилиндр. Архимед, открывший, что отношения объемов и поверхностей этих тел выражаются целыми числами, очень гордился своим открытием.

Поражавшие умы изобретения и открытия Архимеда дали повод и для других легенд. Так, рассказывают, что Архимед, бывший не то другом, не то родственником сиракузского царя Гиерона, получил от него задание установить, не подмешал ли мастер серебра вместо золота в изготовленную им для царя корону. Архимед долго не знал, как взяться за эту задачу, пока однажды, садясь в до краев наполненную ванну, не подметил, что вылилось столько воды, сколько вытеснило его тело. Сразу сообразив, как решить задачу, он нагим побежал домой с криком «эврика, эврика!». Архимеду также приписывают то, что он при помощи рычагов легким движением руки заставил двигаться по суше большой, тяжело нагруженный корабль, извлеченный из моря. Сообщают также, будто он, применив зажигательные, возможно параболические, зеркала, сжег неприятельский римский флот. В его уста вкладывают гордое изречение: «Дайте мне точку опоры, и я сдвину мир».

В отличие от великого систематизатора Евклида, Архимед внес в математику прежде всего собственные открытия, главным образом в области нахождения площадей криволинейных фигур на плоскости и площадей и объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями. Эти открытия, примыкавшие к книге XII Евклида, представляли собой зачаток интегрального исчисления, построенного две тысячи лет спустя трудами Кеплера, Кавальери, Ферма, Лейбница и Ньютона. Отличаясь исключительной ясностью изложения, умением сделать доступными пониманию труднейшие вопросы, сочинения Архимеда, подобно сочинениям почти всех древних авторов, не раскрывают аналитических методов, которыми были добыты полученные результаты, а представляют их в готовом виде, излагают их синтетически.

Только в «Послании к Эратосфену о некоторых теоремах механики» [107], найденном в 1908 г. И. Л. Гейбергом, Архимед рассказывает, как он первоначально открыл некоторые теоремы: «Многое, что я раньше выяснил при помощи механики, я потом доказал посредством геометрии, ибо мои рассуждения, основанные на этом методе, не были еще доказательствами; легче, конечно, найти доказательство, когда мы посредством этого метода составим себе представление об исследуемом вопросе, чем сделать это без такого предварительного представления» ([107], стр. 4—5).

На основании высказываний самого Архимеда, а также того, что в одних из сохранившихся трудов он пользуется результатами, содержащимися в других его трудах, Хизс ([108], т. 2, стр. 22) установил следующий приблизительный порядок их написания: 1) «О равновесии плоскостей», кн. I, 2) «Квадратура параболы», 3) «О равновесии плоскостей», кн. II, 4) «Послание к Эратосфену о механическом методе решения геометрических задач», 5) «О шаре и цилиндре», кн. I и II, 6) «О спиралях», 7) «О коноидах и сфероидах», 8) «О плавающих телах», кн. I и II, 9) «Измерение круга», 10) «Исчисление песчинок» («Псаммит»).

«О равновесии плоскостей». В сочинении «О равновесии плоскостей» ([109], кн. I содержит 15 предложений, кн. II — 10) принципы теоретической механики излагаются строго геометрическим методом.

Главная задача состоит в нахождении центров тяжести параллелограмма, треугольника и трапеции. Решая ее, Архимед не удовлетворился представлением, будто эти фигуры состоят из отрезков, параллельных их сторонам, хотя из этого грубого представления правильно следует, что их центры тяжести должны лежать на прямых — геометрических местах середин этих отрезков. Он прекрасно сознавал, что, например, параллелограмм на самом деле состоит не из отрезков, а из элементарных параллелограммов. Поэтому, если мы примем, что центр тяжести данного параллелограмма лежит на прямой, делящей пополам отрезки, параллельные его стороне, то допустим логическую ошибку «petitio principi», так как доказуемое предполагаем справедливым для элементарных параллелограммов. Поэтому, хотя он несомненно получил свои результаты нестрогим путем, он в каждом отдельном случае дал им строгое доказательство от противного. Так, в случае треугольника, он доказывает, что его центр тяжести должен лежать на медиане.

Вся вторая книга этого сочинения занимается нахождением центра тяжести параболического сегмента, а также части, отрезанной от него прямой, параллельной основанию. С этой целью он вписывает в сегмент (рис. 24) сначала треугольник BAB', где A — точка, в которой касательная параллельна к BB'. Так же он вписывает в образовавшиеся два новых сегмента треугольники BQA и $AQ'B'$, затем тем же способом во вновь возникшие четыре сегмента треугольники BRQ и т. д. Рассматривая вписанную фигуру $BRQPAP'Q'R'B'$, Архимед доказывает, что проведенные через точки R, Q, P, P', Q', R' диаметры, параллельные AO, делят BB' на равные части, между тем как прямые PP', QQ', RR', параллельные BB', делят AO в пропорции нечетных чисел, т. е. $AL:LM:MN:NO = 1:3:5:7$. Центр тяжести вписанной фигуры, равно как и параболического сегмента, лежит на AO (последнее доказывается от противного). При этом центр тяжести параболического сегмента находится ближе к вершине A, чем центр тяжести вписанной указанным способом фигуры, однако расстояние между этими двумя центрами можно сделать меньшим любой заданной величины, для чего достаточно лишь увеличить число сторон этой фигуры. Наконец, устанавливается, что для центра тяжести G имеет место отношение $AG:GO = 3:2$, а также находится центр тяжести фигуры, ограниченной параболой и хордами PP', BB'.

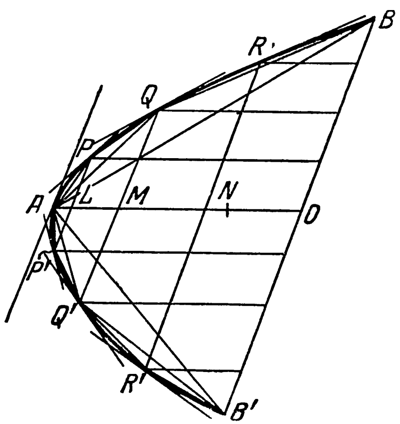


Рис. 24.

«Квадратура параболы». Сочинению «Квадратура параболы» ([110], 24 предложения) Архимед (который не пользовался аполлониевым термином «парабола», а говорил «сечение прямоугольного конуса» — название сочинения позднейшего происхождения) предпослал предисловие, в котором, обращаясь к Досифею после смерти Конона, он заявляет о своем приоритете нахождения площади сегмента параболы, отсеченного произвольной хордой, сначала, как он говорит, найденного им при помощи механики, а затем доказанного средствами геометрии (как мы сказали бы, методом исчерпывания). Механическое решение основывается на следующих двух свойствах параболы (рис. 25). Если Qq — хорда ее сегмента, P — вершина (в которой касательная параллельна

Qq), PV — диаметр, делящий Qq пополам, и если PV, будучи продолжено, пересекает касательную QT в точке T, то: 1) QV^2 пропорционально PV; 2) $TP = PV$. Отсюда Архимед делает вывод, что если прямая EO, параллельная TV, пересекает прямые QT, QP, Qq и параболу в точках E, F, O и R, то имеют место отношения $QV : VO = QF : FP$, $QO : Oq = ER : RO$. После этого Архимед располагает параболический сегмент QR_1q так (рис. 26), чтобы диаметр, делящий Qq пополам, был вертикален, проводит в q диаметр EO до встречи O с горизонтальной прямой QO и до E с касательной QE в точке Q и продолжает QO до A, положив $AO = OQ$. Разделив затем точками O_1, O_2, ..., O_n хорду Qq, он проводит через них вертикальные прямые, пересекающие OQ в точках H_1, H_2, ..., H_n,

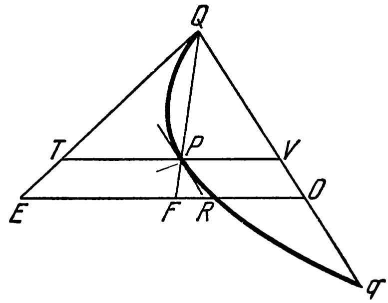


Рис. 25.

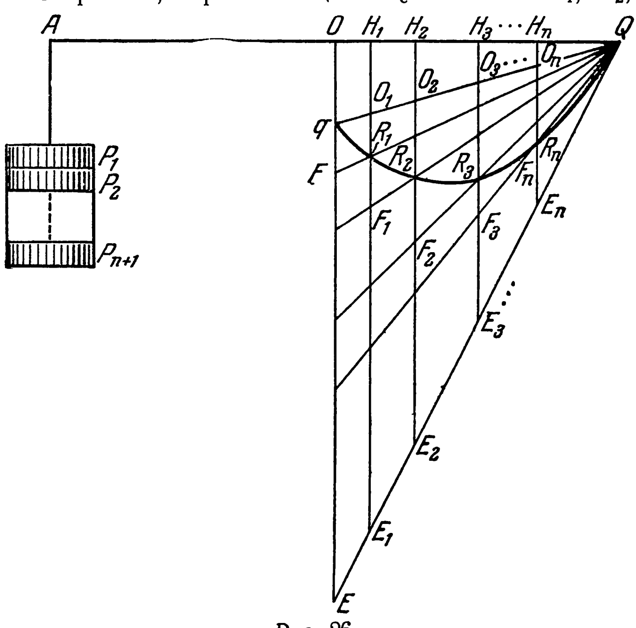


Рис. 26.

касательную QE в точках E_1, E_2, ..., E_n, а параболу в точках R_1, R_2, ..., R_n. Затем он соединяет QR_1 и продолжает до пересечения F с OE, далее QR_2 до пересечения F_1 с H_1E_1 и т. д. Таким образом, получены две фигуры, состоящие из трапеций; одна, описанная около параболического сегмента, состоит из трапеций FO_1, F_1O_2, F_2O_3, ... и треугольника E_nO_nQ; другая, вписанная в него, состоит из трапеций R_1O_2, R_2O_3, ... и треугольника R_nO_nQ (для упрощения мы обозначаем трапеции двумя противоположными вершинами).

Лишь после этой геометрической подготовки Архимед приступает к собственно механическим соображениям. AOQ принимается за равноплечный рычаг, O за точку опоры. Сначала доказывается, что если треугольник QqE подвешен к рычагу в точках O и Q, то он уравновешивается грузом P, подвешенным в A, если $P=\frac{1}{3}QqE$. Затем он доказывает, что груз P_1, уравновешивающий в A трапецию E_1O_2, меньше чем $\frac{OH_2}{OQ}$-кратная, но больше чем $\frac{OH_1}{OQ}$-кратная площадь этой трапеции, и аналогично для других трапеций. Отсюда он приходит к выводу, что описанная фигура уравновешивается грузом бо́льшим, а вписанная — меньшим, чем сумма $P_1+P_2+\ldots+P_{n+1}=\frac{1}{3}QqE$.

После этого Архимед применяет метод исчерпывания, доказывая, что с увеличением числа делений разность между описанной и вписанной фигурами может быть сделана меньше любой заданной величины, и заключает, что площадь параболического сегмента равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника QqE, а так как последняя в четыре раза больше, чем площадь вписанного в сегмент треугольника с тем же, как у сегмента основанием и высотой, то площадь сегмента равна $\frac{4}{3}$ площади этого вписанного треугольника.

Таким образом, Архимед поднял метод Евдокса на новую, более высокую ступень. У него имелись настоящие интегральные суммы — нижняя и верхняя, — и фактически производился переход к пределу. Отличие от открытого Ньютоном и Лейбницем метода состояло, во-первых, в том, что у Архимеда не было ни понятий «предельного перехода», «нижней и и верхней границы», ни соответствующих этим понятиям обозначений. Во-вторых, Архимед применял свой метод лишь к частным, хотя и многочисленным и разнообразным случаям, в то время как в XVII в. этот метод стал всеобщим [1]).

[1]) О методе исчерпывания у Архимеда см. работу А. П. Юшкевича [111]

Следует, однако, отметить, что хотя применяемый Архимедом метод по основной идее родствен методу определенного интегрирования, отождествление этих методов в работах некоторых историков математики следует тем не менее считать неоправданным перенесением современных понятий в древность. Еще менее оправданы встречающиеся довольно часто утверждения, будто механический метод определения площади сегмента параболы состоял в том, что Архимед в самом деле взвешивал вырезанный из какого-нибудь однородного материала сегмент и сравнивал его с весом треугольника, изготовленного тем же способом. Более того, Архимед не считал механический метод доказательным в геометрии и допускал его лишь для предварительной оценки, как наводящий. Он исходил при этом из логического принципа о недопустимости «подмены рода видом». Механические понятия, как обладающие бо́льшим числом признаков, чем понятия геометрические, считались еще Аристотелем чужеродными в геометрии, но это не имело ничего общего с платоновым пренебрежением к механике.

«О методе». Из «Послания к Эратосфену о некоторых теоремах механики» [107] мы привели выше небольшую, но принципиально важную выдержку, показывающую, как глубоко понималась Архимедом математическая строгость. В сочинении «О методе», насчитывающем 16 предложений, вновь выводится площадь сегмента параболы, затем доказывается, что объем прямого цилиндра, описанного около шара (или эллипсоида вращения) и имеющего высоту, равную диаметру шара (или оси вращения эллипсоида), равен $\frac{3}{2}$ объема шара (или эллипсоида). Далее находится объем сегмента, отсекаемого плоскостью, перпендикулярной к оси, от тел вращения: параболоида, шара, эллипсоида и двухполостного гиперболоида. Архимед находит, наконец, объемы двух тел, одно из которых образовано срезом цилиндра плоскостью, а другое — пересечением двух прямых круговых цилиндров одинакового диаметра, пересекающиеся оси которых взаимно перпендикулярны.

«О шаре и цилиндре». В письме к Досифею, открывающем книгу I сочинения «О шаре и цилиндре» [112], Архимед указывает, что он публикует здесь впервые полученные им оригинальные результаты для того, чтобы математики имели возможность ознакомиться с доказательствами и судить о их ценности. Эти новые результаты I книги следующие: 1) площадь поверхности сферы равна 4-кратной площади ее большого круга; 2) площадь поверхности шарового сегмента равна площади круга, чей радиус равен расстоянию вершины сегмента от его круговой периферии; 3) объем цилиндра, описанного около сферы, и имеющего высоту, равную ее диаметру, равен $\frac{3}{2}$ объема сферы; 4) поверхность этого цилиндра, включая и его основания, также равна $\frac{3}{2}$ поверхности сферы. Последние два открытия Архимеда и были запечатлены чертежом на его гробнице.

Вторая книга этого труда содержит шесть задач и три теоремы. В задачах требуется построить сферу, равновеликую данному конусу или цилиндру; разрезать сферу плоскостью

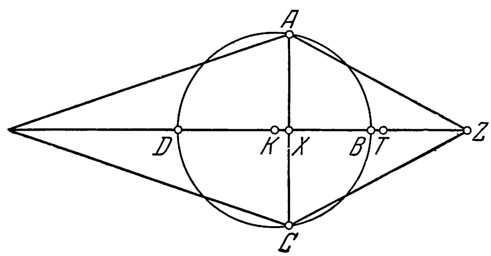


Рис. 27.

так, чтобы объемы или площади поверхностей обоих сегментов находились в данном отношении; если даны два сегмента двух сфер, найти третий, подобный одному из них, и равновеликий по площади или по объему другому; от данной сферы отрезать сегмент, чей объем находится в данном отношении к конусу с тем же основанием и высотой.

Наибольший интерес представляет 4-е предложение книги II «О шаре и цилиндре», в котором требуется рассечь данный шар так, чтобы объемы сегментов находились в данном отношении (см. рис. 27, где изображены также сечения конусов, равновеликих искомым сегментам). Если высота большего сегмента есть $DX = x$, радиус шара r и данное отношение $\frac{m}{n}$, где $m > n$, то задача может быть записана уравнением

$$x^3 + 4r^2 \frac{mr}{m+n} = 3rx^2 \tag{1}$$

или, полагая для краткости $3r = a$, $2r = b$, $\frac{mr}{m+n} = c$,

$$x^3 + b^2c = ax^2. \tag{1'}$$

Сам Архимед выражает задачу в форме пропорции: даны две прямые BD и BZ, из которых DB вдвое больше BZ, а также точка T на BZ; требуется разделить DB в точке X так, чтобы

$$\frac{BD^2}{DX^2} = \frac{XZ}{TZ}. \qquad (2)$$

Легко видеть, что пропорция (2) приводится к уравнению (1'). Решение и исследование вспомогательной задачи о делении Архимед обещал привести в конце предложения, но в дошедшем до нас тексте трактата «О шаре и цилиндре» и других сочинениях сиракузского математика решение отсутствует. Евтокий в комментарии к трактату сообщает прием, который, вероятно, принадлежал самому Архимеду. Решение основывается на геометрическом построении, аналогичном тому, какое применил Менехм к построению стороны x куба, по объему равного данному параллелепипеду b^2c, т. е. к двучленному уравнению

$$x^3 = b^2c.$$

Корень уравнения (1') представляется как абсцисса точки пересечения двух конических сечений: симметричной относительно оси ординат параболы

$$\frac{2}{3}by = x^2$$

и равносторонней гиперболы, асимптотами которой служат ось абсцисс и прямая $x = a$,

$$(a - x)\,y = \frac{3bc}{2}.$$

Согласно Евтокию Архимед дал также диоризм задачи, т. е. исследовал условие ее возможности, показав, что искомый отрезок $DX = x$ существует, если точка T лежит между B и Z. В переводе на язык алгебры это значит, что если только, как и должно быть, $\frac{m}{m+n} < 1$ или же $b^2c < \frac{4}{27}a^3$, то существует положительный корень уравнения (1), меньший $\frac{2}{3}a = 2r$. При этом существует и второй положительный корень, который больше $2r$ и потому не учитывается. Равенство $b^2c = \frac{4}{27}a^3$, т. е. $\frac{m}{m+n} = 1$ и $n = 0$, определяет границу положительного корня; в этом случае гипербола и парабола имеют в общей точке общую касательную, мы бы сказали, что уравнение имеет двойной положительный корень. Уравнение (1) или, точнее, (2) Архимед использует и в некоторых других задачах.

«О спиралях». Сочинение «О спиралях» [113], состоящее из 28 предложений, открывается предисловием, обращенным к Досифею, в котором он сожалеет о смерти Конона, как о тяжелой потере для математики, и исправляет два последних предложения книги II своего сочинения «О сфере и цилиндре», первоначально сообщенные им Досифею в ошибочной формулировке. Затем дано определение спирали как линии, описываемой точкой, равномерно движущейся по прямой, когда эта прямая равномерно вращается на плоскости вокруг одной неподвижной своей точки. Таким образом, здесь Архимед все-таки применяет движение в геометрии, но не для доказательства с использованием рассуждений о «бесконечно малых», а для определения новых геометрических фигур. Первые девять предложений являются предварительными; они занимаются «вставками» между прямыми и окружностью, в алгебраическом виде приводящими к уравнениям четвертой степени, решающимся при помощи пересечения параболы и равнобочной гиперболы. Далее, после двух предложений о суммировании ряда $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, доказывается основное свойство кривой, уравнение которой мы записываем в полярных координатах в виде $\rho = a\varphi$, а это означает, что каждый луч пересекает кривую в точках, равноотстоящих друг от друга. Дальнейшие предложения доказывают (рис. 28), что длина полярной подкасательной OT (т. е. отрезка, соединяющего начало O и точку пересечения T касательной PT в точке P с перпендикуляром OT к радиусу-вектору OP) равна длине круговой дуги AP (где OA — полярная ось спирали, по Архимеду — ее «начальная линия»). Наконец, Архимед при помощи метода исчерпывания, вписывая в спираль и описывая около нее ступенчатую фигуру (рис. 29), ограниченную дугами окружностей и отрезками радиусов-векторов $OB = b$, $OC = c$, находит

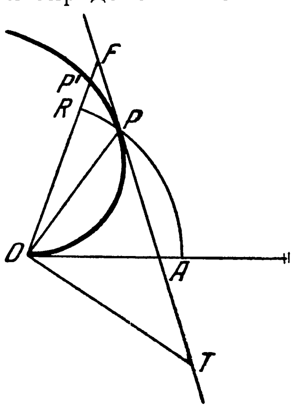


Рис. 28.

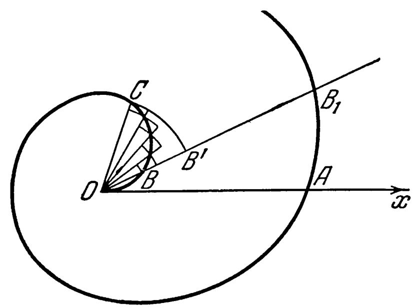


Рис. 29.

ее площадь равной $\frac{c^3 - b^3}{3c^2(c-b)}$ части кругового сектора $OB'C$. Для первого витка длина полярной подкасательной равна периметру «первого круга» (т. е. круга с радиусом, равным радиусу-вектору конца витка), а площадь витка равна $\frac{1}{3}$ площади этого круга. Таким образом, спираль можно использовать для решения задачи о спрямлении круга, а следовательно, и его квадратуры. Как указал еще Цейтен ([12], стр. 126), Архимед рассматривал (рис. 28) характеристический бесконечно малый треугольник PRF, образованный касательной к спирали, дугой окружности радиуса OP и продолженным до касательной радиусом-вектором OP', близким к OP; этот треугольник подобен (приблизительно) прямоугольному треугольнику POT. Таким образом, в сочинении Архимеда имелись прообразы не только интегральных, но и дифференциальных методов, которые наряду с первыми послужили в XVI—XVII вв. отправными пунктами при создании анализа [114].

«О коноидах и сфероидах». Архимед предпослал трактату «О коноидах и сфероидах» предисловие, в котором он, излагая Досифею полученные результаты, дает определения рассматриваемых поверхностей, которыми, по современной терминологии, являются: параболоид вращения (у Архимеда «прямоугольный коноид»), двуполостный гиперболоид вращения («тупоугольный коноид») и два вида «сфероидов»: «удлиненный» и «сплющенный», образуемые вращением эллипса вокруг «большего» и «меньшего диаметра». Название «коноид» означает конусовидное тело, «сфероид» — сферовидное. «Прямоугольным» и «тупоугольным» коноидом Архимед назвал эти тела по доаполлониевым названиям параболы и гиперболы как сечений прямоугольного и тупоугольного конусов, причем сечения предполагались перпендикулярными к одной из образующих конуса (эллипс считался «сечением остроугольного конуса»). Из 32 предложений этого трактата первые 18 предварительные — о суммировании рядов, о некоторых свойствах конических сечений и рассматриваемых тел; в остальных находятся объемы прямых или косых сегментов этих тел.

«О плавающих телах». Гидростатическое сочинение Архимеда «О плавающих телах» [115] излагает в двух книгах основы этой науки. Архимед выводит их из двух постулатов. В начале книги доказывается предложение о том, что поверхность любой покоящейся жидкости есть сфера с центром в центре Земли, затем предложение о погружении в жидкость тел, весящих одинаково, меньше или больше чем жидкость равного объема, а также известная названная именем Архимеда теорема. Это (седьмое) предложение дает возможность решить уже упомянутую легендарную задачу с короной, причем двумя различными способами.

Вторая книга, состоящая из десяти предложений, целиком посвящена исследованию условий равновесия плавающего прямого сегмента параболоида вращения для разных случаев отношения удельных весов тела и жидкости, параметра образующей параболы и высоты сегмента. Архимед рассматривает случаи, когда основание сегмента либо полностью погружено в жидкость, либо полностью находится вне ее, и доказывает, что в этих случаях при отклонении оси сегмента на произвольный угол от вертикального положения сегмент возвратится в состояние равновесия.

Отметим, что в этом сочинении, вызванном к жизни развитием судостроения, Архимед не стал на распространенную тогда ошибочную натурфилософскую точку зрения Аристотеля, согласно которой одни тела, «легкие», устремляются вверх, а другие, «тяжелые», — вниз, а следуя за материалистом Демокритом, считал, что все тела стремятся к центру Земли.

«Измерение круга» [116]. Пожалуй, наиболее известным сочинением Архимеда является трактат «Измерение круга», из которого, однако, сохранился лишь фрагмент, состоящий всего из трех предложений, и, судя по языку, не являющийся оригинальным текстом, а только переложением его. Здесь доказывается, что:

1) площадь круга равна площади прямоугольного треугольника с высотой, равной радиусу, и с основанием, равным окружности;

2) площадь круга относится к квадрату, построенному на его диаметре как 11 к 14, и

3) отношение любой окружности к ее диаметру меньше $3\frac{1}{7}$, но больше $3\frac{10}{71}$.

Первое предложение Архимед доказывает методом исчерпывания, вписывая в окружность и описывая около нее правильные многоугольники, начиная с правильного шестиугольника и удваивая всякий раз количество сторон. Текст второго предложения, по-видимому, испорчен; Архимед не мог поместить его перед третьим, из которого оно вытекает. Наиболее интересным является третье предложение, в котором находится приближенное значение числа π. Оно вычисляется как приближенное значение периметров двух правильных 96-угольников, описанного и вписанного, причем вычисление опирается на принятое Архимедом, как известное, неравенство

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

«Исчисление песчинок». Последняя из дошедших до нас на греческом языке работ Архимеда «Исчисление песчинок» («Псамми́т») [117] является арифметическим сочинением. В нем излагается способ, которым можно выразить сколь угодно большое число. В основу своей системы Архимед положил октаду, равную мириаде мириад, т. е. 10^8. Числа до 10^8 считались «первыми числами». Число 10^8 считалось единицей «вторых чисел», число $(10^8)^2$ считалось единицей «третьих чисел» и так до $(10^8)^{10^8}$ — единицы 10^9-х чисел. Все эти числа составляли первый период, за которым следовали дальнейшие периоды, вплоть до 10^8-го периода. Наибольшее число, которое можно выразить с помощью этого счета «октадами» $(10^{8\cdot 10^8})^{10^8}$, — число, которое в нашей обычной системе записывается как 1 с 80 000 миллионами миллионов нулей. Для его написания потребовалось бы расстояние, превышающее 500-кратное расстояние от Земли до Солнца, если каждый нуль занимал бы 1 миллиметр.

Архимед показывает, что его система более чем достаточна, чтобы выразить количество песчинок, которые заполнили бы вселенную, рассматриваемую Архимедом как шар, ограниченный сферой неподвижных звезд. Примыкая к гелиоцентрическим воззрениям Аристарха Самосского и основываясь на его данных, Архимед определяет размеры сферы неподвижных звезд и находит, что она в 10^{12} раз больше, чем сфера, чьим большим кругом является орбита Земли. Приняв, что одна песчинка составляет 10^{-4} часть макового зернышка, а последнее имеет диаметр, равный $\frac{1}{40}$ ширины пальца, он нашел, что число песчинок во вселенной будет меньше чем 10^{63}.

Любопытно отметить, что астрономические данные, на которые опирался Архимед, были для его времени исключительно точны. Так, длину большой окружности земного шара он принимает равной 300 000 стадий, т. е. 55 000 *км* (в действительности 40 000 *км*). Для угла, под которым виден солнечный диск (видимая величина Солнца), он находит при помощи наблюдений верхнюю границу 32,9′, а нижнюю 27′ (лишь на 55″ превышающую истинное значение). Диаметр Солнца он считает превышающим диаметр Земли не более чем в 30 раз (на деле в 109 раз), расстояние Земли от Солнца равным 5 миллиардам стадий, т. е. 925 миллионам *км* (на деле 150 миллионов *км*), радиус сферы неподвижных звезд — равным 9,25 биллиона *км*, т. е. почти одному световому году ($9{,}46 \cdot 10^{12}$ *км*) — число того же порядка, что и расстояние до ближайших звезд (Ближайшая Центавра — 4,2 светового года).

Возникает вопрос: для чего, собственно, было предпринято это исследование, какую цель оно преследовало? Оно не служило практическим потребностям. Не только повседневная жизнь, но и наука того времени не нуждались в столь больших числах. Оно возникло благодаря отвлеченным, теоретическим, мировоззренческим интересам, опровергая распространенное представление о существовании «последнего числа», о невозможности «сосчитать песок моря», показывая убедительно силу абстрагирующей человеческой мысли. И если во времена Архимеда, 2200 лет назад, наибольшие доступные представлению человека пространственные масштабы превышали наименьшие в 10^{21} раз, то теперь доступные измерению наибольшие масштабы превышают наименьшие в 10^{40} раз.

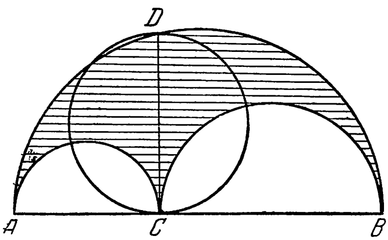


Рис. 30.

«Предположения». В латинском переводе с арабского сохранилось приписываемое Архимеду сочинение «Предположения» (см. [112]), состоящее из 15 предложений, которое, однако, представляет лишь пересказ утерянного оригинала. В трех предложениях изучается фигура, названная «арбелос», — резак, кривой нож сапожника, состоящая из трех полукругов и изображенная на рис. 30. Архимед устанавливает, что ограниченная тремя полуокружностями площадь $ACBD$ равна площади круга, диаметр которого равен CD.

Далее доказывается, что если продолжить (рис. 31) любую хорду AB круга с центром O так, чтобы $BC = OB$, и провести линию CO, пересекающую окружность в точках D и E, тогда дуга BD будет равна $\frac{1}{3}$ дуги AE, или, если проведем еще EF параллельно AB, $\frac{1}{3}$ дуги BF. Это предложение может послужить для решения проблемы трисекции угла, если воспользоваться вставкой. Для этого нужно лишь, если дан угол AOE, который требуется разделить на три равные части, провести через A прямую ABC так, чтобы отрезок BC между окружностью и продолжением прямой EO был равен OF.

Полуправильные многогранники. Благодаря Паппу сохранились сведения об открытии Архимедом полуправильных многогранников, т. е. таких выпуклых многогранников, все грани которых — правильные многоугольники более чем одного вида, а все многогранные углы конгруэнтны друг другу или симметричны. Архимед нашел тринадцать таких вполне определенных тел, ограниченных 8, 14, 26, 32, 38, 62 или 92 гранями, имеющими форму треугольников, квадратов, пятиугольников, шестиугольников, восьмиугольников, десятиугольников или двенадцатиугольников. Десять из этих тел ограничены двумя, остальные три — тремя видами многоугольников. Из сообщения Герона видно, что Архимед, указывавший, что уже Платон знал два из этих тел, получил их из пяти правильных

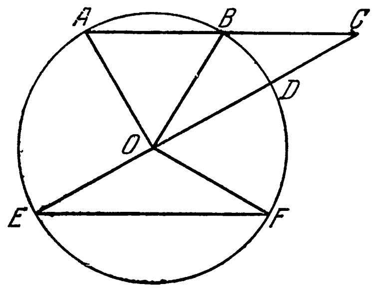


Рис. 31.

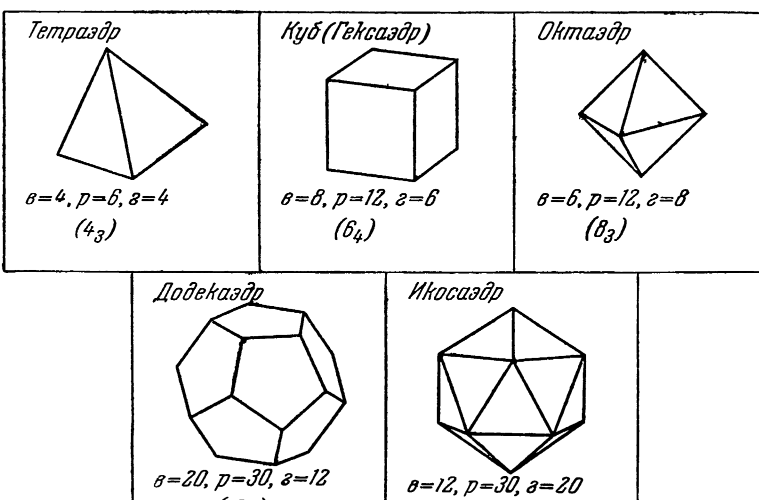
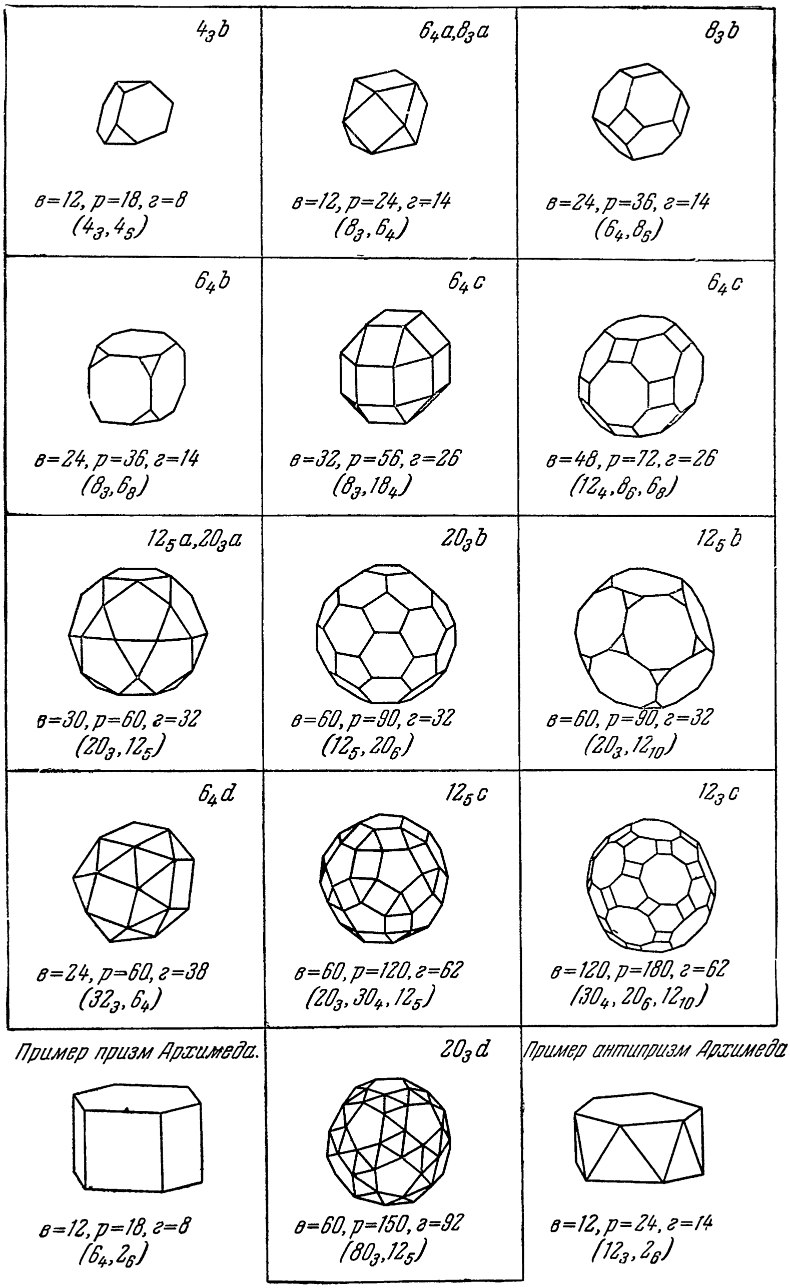


Рис. 32.

многогранников (рис. 32). При этом семь из тел Архимеда получены путем отсечения вершин правильных многогранников плоскостями: либо (*а*) делящими пополам все сходящиеся к вершине ребра, либо (b) отрезающими от них меньшую часть в такой пропорции, чтобы образующиеся при этом многоугольники с удвоенным против прежнего числом сторон были правильными многоугольниками. Из остальных полуправильных многогранников четыре получаются: (c) путем отсечения ребер соответствующего правильного многогранника плоскостью, параллельной ребру и отрезающей от других ребер одинаковые части, а затем отсечением вершин, либо способом (a), либо (b). При этом некоторые тела можно получить несколькими способами. Наконец, оставшиеся два тела получаются следующим образом: (d) в центре грани соответствующего правильного многогранника помещается правильный многоугольник, подобный многоугольнику, ограничивающему грань, но меньший, чем он, и повернутый на некоторый угол, в одинаковом смысле на всех гранях, затем соединяются вершины многоугольников соседних граней сетью правильных многоугольников и остальная часть правильного многогранника устраняется. Кроме этих тринадцати определенных полуправильных многогранников, Архимед указал еще два бесконечных класса полуправильных многогранников — призм и антипризм. На рис. 33 изображены тринадцать тел Архимеда. Здесь указано число вершин — *в*, ребер — *р* и граней — *г* каждого тела, число граней у каждого тела и сколько каждого вида граней в отдельности это тело имеет (например, 4_3 означает четыре треугольника) и каким способом из какого правильного многогранника оно получено (например, 6_4a означает способом (a) из куба).

Архимеду приписывается также задача на неопределенные уравнения, сформулированная в стихах и получившая название «Задачи о быках Геликона», в которой требуется найти число быков и коров четырех различных цветов, иначе говоря, найти восемь неизвестных. Решение приводит к так называемому уравнению Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$, где $D = 4 \cdot 729 \cdot 494$, наименьшие целочисленные корни которого, отличные от $x = 1$, $y = 0$, столь велики, что искомые восемь неизвестных выражаются числами, насчитывающими более чем 200 000 знаков.

Наконец, с именем Архимеда связана математическая игра, «ларчик Архимеда» — квадрат из слоновой кости, разрезанный на 14 различных многоугольных частей, из которых требовалось вновь собрать этот квадрат или другие заданные фигуры. Арабские источники называют также ряд других сочинений Архимеда, однако не сохранились даже какие-либо следы их. Утерян также астрономический труд Архимеда «Об изготовлении небесной сферы», в котором он описывал по-



$4_3 b$
в=12, р=18, г=8
$(4_3, 4_5)$
$6_4 a, 8_3 a$
в=12, р=24, г=14
$(8_3, 6_4)$
$8_3 b$
в=24, р=36, г=14
$(6_4, 8_6)$
$6_4 b$
в=24, р=36, г=14
$(8_3, 6_8)$
$6_4 c$
в=32, р=56, г=26
$(8_3, 18_4)$
$6_4 c$
в=48, р=72, г=26
$(12_4, 8_6, 6_8)$
$12_5 a, 20_3 a$
в=30, р=60, г=32
$(20_3, 12_5)$
$20_3 b$
в=60, р=90, г=32
$(12_5, 20_6)$
$12_5 b$
в=60, р=90, г=32
$(20_3, 12_{10})$
$6_4 d$
в=24, р=60, г=38
$(32_3, 6_4)$
$12_5 c$
в=60, р=120, г=62
$(20_3, 30_4, 12_5)$
$12_3 c$
в=120, р=180, г=62
$(30_4, 20_6, 12_{10})$
Пример призм Архимеда.
в=12, р=18, г=8
$(6_4, 2_6)$
$20_3 d$
в=60, р=150, г=92
$(80_3, 12_5)$
Пример антипризм Архимеда
в=12, р=24, г=14
$(12_3, 2_6)$

Рис. 33.

строенный им планетарий, приводимый во вращение водяным двигателем, а также его работы по механике «О рычагах» и «Книга опор».

Оценивая вклад Архимеда в развитие математики, мы прежде всего отмечаем, что, как на это указал А. Чвалина ([118], стр. 7), математика Евклида неохотно применяла изменение и непрерывность, например, видела в окружности прежде всего постоянство расстояний ее точек от заданной точки, между тем как математика Архимеда значительно больше оперирует с переменными; она явно вводит движение в геометрию, идя тем самым смело вразрез с господствовавшим метафизическим мировоззрением. Архимед предвосхищает в зачаточном виде тот поворот в развитии математики, который, по выражению Энгельса ([3], стр. 206), вызвала «декартова *переменная величина»* и который вскоре привел к созданию математического анализа. В самом деле, как мы видели, Архимед в своих сочинениях значительно развил как метод определения площадей и объемов, так и метод нахождения касательных к кривым и нахождения экстремумов, придав этим методам наибольшую возможную тогда общность. Он рассматривал метод «неделимых» лишь как эвристическое средство, наводящее на открытие теоремы, считая обязательным ее доказательство методом исчерпывания. При этом он ввел впервые рассмотрение верхней и нижней сумм, ограничивающих искомую величину (площадь или объем), разность между которыми становилась сколь угодно малой. Он ввел также рассмотрение характеристического треугольника, связанного с касательной. Для прямой, окружности, конических сечений и спирали он доказывал важнейшее свойство непрерывных величин: то, что они между двумя своими значениями принимают все промежуточные значения. Он нашел также способ сведе́ния обширного класса задач на экстремум к задачам на построение касательной. Таким образом, у Архимеда были систематически разработаны понятия, вошедшие затем, через два тысячелетия, в основу интегрального и дифференциального исчислений.

Второй характерной чертой математического творчества Архимеда было понимание связи между отдельными задачами, позволяющими решать одним и тем же формальным приемом задачи различного содержания. Так, например, он обнаружил, что объем сегмента параболоида вычисляется тем же приемом, что и площадь треугольника, объем конуса — как площадь сектора спирали. Это стало возможным потому, что, обращая главное внимание не на сами величины, а на их изменение, Архимед поднялся на более высокую, чем прежде, ступень абстракции, сумев отвлечься от конкретных особенностей рассматриваемых величин и осознать, как бы мы сказали теперь, внутренние функциональные связи между ними.

Третьей, наиболее ярко выраженной особенностью математического творчества Архимеда является его связь с механикой, гидростатикой и астрономией, сближение теории с практикой, внимание к вычислительной математике и развитие ее приемов. В этом отношении особенно характерно его вычисление приближенного значения числа π, установление неравенства $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, дающего погрешность в границах от 75 до 126 стотысячных. Следовательно, и здесь Архимед сумел преодолеть аристократические идеалистические предрассудки относительно «низменности» прикладных знаний. Он поставил математический метод на службу естественным наукам и технике, создав в своих трудах замечательный образец того «точного и систематического исследования», которое, как указывает Энгельс ([3], стр. 145), называя Архимеда его представителем, впервые появилось лишь в александрийском периоде, чтобы в новое время стать общим достоянием естествознания и техники. Работы Архимеда, равно как и работы его великого преемника Аполлония Пергского, оказали громадное влияние на все дальнейшее развитие математики. Содержавшиеся в них методы и идеи, хотя и не оформленные в законченных понятиях и обозначениях, при посредстве арабских переводов дошли до нового времени и послужили отправными при создании анализа (см. также [119, 120]).

Несмотря на то, что находившееся под властью Птолемеев египетское рабовладельческое государство, начиная с конца III в. до н. э., вследствие непрекращающихся войн и восстаний теряло все больше свое экономическое и культурное первенствующее положение среди стран эллинистического мира, александрийская математика продолжала процветать и дала замечательные плоды даже тогда, когда философия, поэзия и искусство переживали период глубокого упадка. После Архимеда на протяжении четырех веков не было никого, кто мог бы сравниться с этим гениальным умом, но тем не менее сохранилась память о ряде ученых, внесших свой собственный вклад в развитие математики. Это были Эратосфен, Никомед, Диокл, Зенодор и упоминавшийся нами выше Гипсикл, автор XIV книги «Начал» Евклида.

Эратосфен. Сравнительно много биографических данных сохранилось об Эратосфене, родившемся в 276 или 275 (а по другим сведениям в 284) г. до н. э. в Кирене, на северном побережье Африки. В Александрии, где он прожил почти всю свою жизнь, он обучался у своего земляка Каллимаха, руководителя знаменитой александрийской библиотеки. Некоторое время Эратосфен провел в Афинах. В сорокалетнем возрасте он вернулся в Александрию, где стал учителем Филопатора, сына Птолемея III Эвергета (247—222 гг. до н. э.), а в дальнейшем преемником Каллимаха. Эратосфен умер около 194 г. до н. э., ослепший и, по некоторым сведениям, удаленный из библиотеки, в полной нищете. Дарования Эратосфена были разносторонни; Архимед высоко их ценил, но выдающихся трудов Эратосфен не создал.

До нас дошли лишь два собственно математических открытия Эратосфена: это его знаменитое «решето» («коскинон») и его решение делийской проблемы. Решето Эратосфена представляет собой известный прием для нахождения всех простых чисел, меньших чем заданное число n, кроме числа 2, которое нужно добавить. Впрочем, некоторые греки, как неоплатоник Ямблих (ум. около 330 г. н. э.), считали, что число 2, будучи четным, якобы неправильно зачислено Евклидом в простые числа.

В комментарии к сочинению Архимеда «О шаре и цилиндре» Евтокий рассказывает историю делийской проблемы, ее легендарное возникновение и решения, предложенные Архитом, Евдоксом и Менехмом, причем все это в виде письма Эратосфена Птолемею. Хотя само письмо является подложным, но содержащееся в нем решение Эратосфена подлинно. Как мы уже указывали, эта задача — задача удвоения куба— была сведена Гиппократом Хиосским к задаче нахождения двух средних пропорциональных, а последнюю задачу он решал стереометрически — пересечением трех поверхностей вращения, сам Евтокий решал ее при помощи пересечения кривой четвертого порядка с окружностью, а Менехм — с помощью пересечения двух конических сечений, а Платону приписывается одно из механических решений этой задачи. Решение Эратосфена также является механическим и осуществляется при помощи простого прибора, названного «месолабон». Эратосфен придавал своему открытию столь большое значение, что воздвиг колонну, посвященную Птолемею, с надписью, излагающей суть построения, и бронзовым изображением прибора.

Эратосфен является также автором сочинения «Платоникос», в котором основные математические понятия, в частности пропорции, а также принципы музыки рассматривались в свете платоновой философии. О другом труде Эратосфена, «О средних», Папп сообщает лишь, что он состоял из двух книг, причем здесь, по-видимому, изучались геометрические места точек, расстояния которых от трех данных прямых образовывали какую-нибудь из тех пропорций, которые изучались греками.

Наряду с чисто математическими нельзя, однако, не упомянуть и астрономические работы Эратосфена, среди которых находится прославившее его имя измерение Земли, описанное им в отдельном сочинении. Это — первое исторически установленное определение размеров Земли. Эратосфен нашел, что длина большой окружности земного шара равна 250 000 египетских стадий, т. е. в зависимости от различных оценок, даваемых этой мере, заключена между 39 и 46 тысячами километров; эта оценка более точна, чем у Архимеда, и должна считаться необыкновенно удачной. Сочинение «Измерение Земли» содержало, согласно Клавдию Галену (ок. 130—200 гг.), и многие другие сведения по математической географии и астрономии. Эратосфен занимался также хронологией; ему приписывают разработку взамен старого египетского календаря, в котором год был равен 365 дням, нового календаря с високосным годом в 366 дней каждый четвертый год. Этот календарь, приводивший в соответствие календарные даты с действительными временами года, был введен указом от 7 марта 238 г. до н. э., объявленном на собрании жрецов в Канопе.

Никомед. О Никомеде, жившем в период между Эратосфеном и Аполлонием, известно лишь, что он для нахождения двух средних пропорциональных и решения задач трисекции угла и удвоения куба применил открытую им кривую, называемую конхоидой (т. е. похожей на раковину). Так называет ее Прокл. Папп называл ее кохлеоидой, различая четыре вида кохлеоид и указывая, что первый из этих видов служит для решения обеих названных задач. Никомед построил свою кривую при помощи изобретенного им особого прибора. Конхоида Никомеда (рис. 34) является геометрическим местом точек M, для которых $OM = OP \pm b$. В зависимости от того, какое из трех отношений $b > a$, $b = a$ или $b < a$ (где $a = OF$, $b = FA$) имеет место, получаются три вида кривой. Ее уравнение в прямоугольных координатах $(x-a)^2 \times \times (x^4 + y^4) - b^2x^2 = 0$ и в полярных координатах $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Позднее понятие конхоиды было обобщено; ею стали называть кривую, получающуюся при увеличении или уменьшении радиуса вектора каждой точки данной кривой (не только прямой) на постоянный отрезок b. В частности, Э. Паскаль (1588—1651 гг.), отец знаменитого математика Блеза Паскаля, рассматривал конхоиду окружности, полюс которой находится на самой окружности. Она получила название улитки Паскаля. Ее частным случаем, когда b равно диаметру окружности, является кардиоида. Как сообщает Папп, Никомед доказал, что конхоида имеет асимптоту. Евтокий отмечает, что Никомед необыкновенно гордился своим открытием, противопоставляя его прибору Эратосфена, который он считал практически непригодным и не соответствующим духу геометрии.

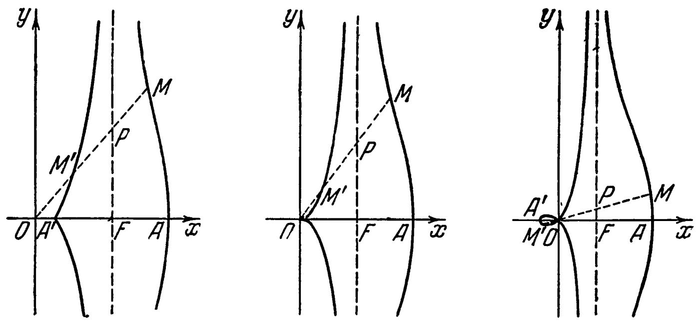


Рис. 34.

Нахождение двух средних пропорциональных при помощи конхоиды опиралось на построение вставки, описанное Паппом и Евтокием. Конхоида — первая кривая после прямой и окружности, о которой известно, что для ее непрерывного вычерчивания был создан специальный прибор.

Диокл. Около 200 г. до н. э., а возможно и после Аполлония, жил Диокл, как и Никомед, занимавшийся двойной средней пропорциональной и открывший линию, называемую циссоидой (похожей на плющ). Циссоида (рис. 35) является геометрическим местом точек M, для которых $OM = PQ$. Ее уравнение в прямоугольных координатах имеет вид $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, где $2a = OA$, а в полярных координатах вид $r = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right)$. Позднее стали строить циссоиды не только окружности, но и любых кривых. Диокл, по сведениям Евтокия, написал сочинение «О зажигательных зеркалах», два отрывка из которого Евтокий и передает. Диокл весьма остроумно решил также задачу Архимеда о разрезе шара плоскостью так, чтобы объемы обоих сегментов находились друг к другу в заданной пропорции. Эта задача содержится, как нами отмечено, в виде

4-го предложения во второй книге сочинения «О шаре и цилиндре». Окончание задачи, содержавшее решение Архимеда, было утеряно еще в древности. Эту задачу, приводящую к кубическому уравнению, Диокл решал пересечением равнобочной гиперболы с эллипсом. Какой формы были зажигательные зеркала, которыми занимался Диокл, в точности неизвестно, однако арабские источники указывают на него, как на изобретателя параболических зеркал.

Зенодор. Сохранились у Паппа и Теона Александрийского выдержки из труда «Об изопериметрических фигурах» Зенодора, также жившего около 200 г. до н. э. Интерес к геометрическим фигурам, имеющим одинаковые периметры, возник у греческих математиков, вероятно, в связи с тем, что в древности нематематикам казалось парадоксальным, что, например, два параллелограмма одинакового периметра могут иметь в то же время разные площади. Зенодор доказал, что среди всех правильных многоугольников одинакового периметра наибольшую площадь имеет тот, у которого наибольшее количество углов, что площадь круга больше площади любого правильного многоугольника, имеющего с кругом одинаковые периметры, что из всех многоугольников, имеющих одинаковое число сторон и равные периметры, правильный многоугольник обладает наибольшей площадью. Зенодор не ограничился планиметрическими задачами, а доказал также, что сфера имеет объем больший, чем тело, образованное вращением правильного многоугольника того же периметра вокруг оси, проходящей через центр и одну из вершин, а также что объем сферы больше, чем объем правильного многогранника, имеющего с ней одинаковую поверхность.

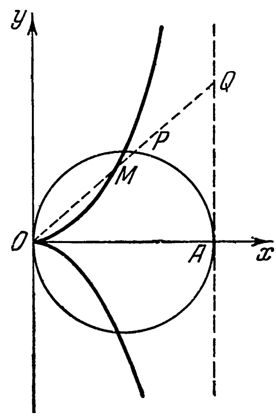


Рис. 35.

Аполлоний Пергский. Третьим и последним великим математиком периода эллинизма наряду с Евклидом и Архимедом был Аполлоний Пергский (из Перги, города в Малой Азии). Он жил главным образом в Александрии, где учился у преемников Евклида. Год рождения Аполлония определяется около 262, год смерти — около 200 до н. э. Он посетил крупный центр греческой культуры того времени — город Пергам на северо-западе Малой Азии, где познакомился с Евдемом Пергамским, которому посвятил первые две книги второго издания своего восьмитомного основного труда «Конические сечения» («Коника»).

«Конические сечения». Первые четыре книги «Конических сечений» [121, 122] дошли до нас на греческом языке, следующие три — в арабском переводе, а последняя потеряна. Подход Аполлония к коническим сечениям отличается от методов всех его предшественников, в том числе и Архимеда, необыкновенной силой обобщения. В то время как до Аполлония каждое из трех видов сечений получали из отдельного вида прямых круговых конусов, он получает все три вида сечений из любого кругового конуса, прямого или косого. Установив связь между задачей приложения площадей и коническими сечениями, Аполлоний, в отличие от своих предшественников, называвших эти кривые сечениями остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов, дал им названия эллипса, параболы и гиперболы — названия, навсегда вошедшие в науку.

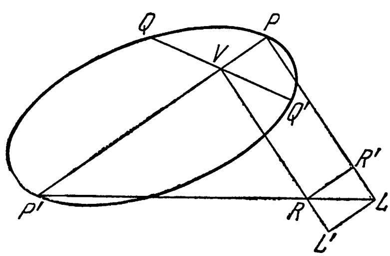


Рис. 36.

Первая книга «Конических сечений» открывается определением кругового конуса, в общем случае наклонного, причем конус рассматривался по обе стороны вершины. Здесь же вводились основные понятия теории конических сечений, вершина конического сечения, его диаметры, сопряженные диаметры и оси.

Аполлоний получает эллипс, параболу или гиперболу в зависимости от того, пересекает ли плоскость все образующие лишь одной полости конуса, параллельна ли она одной образующей, или пересекает обе его полости. Для каждой из этих кривых Аполлоний устанавливает ее основное свойство, пользуясь косоугольными координатами: осями координат избраны произвольный диаметр PP' и сопряженная с ним хорда QQ'; начало координат P лежит на кривой. Если мы воспользуемся современной алгебраической записью, то эти свойства выразятся в виде

$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a} x^2,$$

где знак минус соответствует эллипсу, знак плюс — гиперболе; в случае параболы второй член в правой части равен нулю; p обозначает параметр кривой. При этом $y = QV$, $x = PV$, $2a = PP'$, $2p = PL$. Разумеется, Аполлоний выражает свойства этих кривых при помощи геометрической алгебры.

Таким образом, хотя Аполлоний и не открыл это основное свойство конических сечений, которое было известно еще Менехму, Евклиду и Архимеду, однако он выразил его общим способом, равносильным уравнению, которым конические сечения определяются в аналитической геометрии, если отнести их к косоугольным координатам.

Значительная часть книги I посвящена доказательству того, что основное свойство конических сечений не зависит от выбора диаметра, к которому оно отнесено, или, говоря современным языком, доказывается инвариантность этого свойства при переходе от одной системы координат к другой.

Книга II начинается разделом об асимптотах гиперболы. В остальном в книге II рассматриваются сопряженные гиперболы, а также свойства касательных к коническим сечениям и задачи на построение касательных при разных условиях.

Первая часть книги III содержит предложения о равенстве площадей прямолинейных фигур, образованных касательными и секущими конического сечения. Предложение о гармонических свойствах полюса и поляры (эту терминологию Аполлоний еще не употребляет), так же как и другие предложения, доказывается отдельно для разных случаев.

Среди других предложений следует особо отметить те, которые вводят фокусы эллипса и гиперболы и исследуют их свойства. В связи с фокусами рассматривается также и нормаль. Для параболы фокус не рассматривается, не введено также понятие директрисы.

Последние предложения этой книги находятся в связи с рассмотрением конического сечения как геометрического места точек, косоугольные координаты которых относительно трех или четырех прямых удовлетворяют некоторым условиям.

Начиная с книги IV, Аполлоний посвятил «Конические сечения» царю Атталу I (241—197 гг. до н. э.). Из содержания книги IV наиболее интересно то, что здесь исследуется вопрос о количестве точек пересечения конического сечения с окружностью и с другим коническим сечением, а также случаи касания двух сечений. Этот вопрос был важен для греков, так как именно точки пересечения нужны были при решении таких задач, как задача удвоения куба, для которых, собственно, эти кривые и были изобретены.

Четвертой книгой как бы завершалась более элементарная часть учения о конических сечениях; возможно, поэтому они были более распространены, чем остальные, и что как раз это и явилось причиной того, что сохранился их греческий текст. Книга V выделяется из всех других; как по содержанию, так и по способу изложения она заметно опередила свое время. В ней Аполлоний рассматривает нормали, проведенные из разных точек к коническим сечениям, как прямые максимальной или минимальной длины. В предисловии к ней он отмечает, что геометры, занимавшиеся до него вопросом об экстремальных расстояниях, делали это лишь в связи с диорисмами, для того чтобы выяснить условия, при которых решается та или другая задача, и делали это весьма неполно. Между тем Аполлоний занимается этим вопросом, как он говорит, как таким, «который принадлежит к вещам, достойным, чтобы ими занимались ради них самих». В конце книги V рассматриваются точки, из которых всегда возможно провести нормаль к близлежащей части кривой (центры кривизны в нашем понимании), изменение положения этих точек, чему соответствует эволюта конического сечения, и построение нормалей к кривой из любой точки при помощи пересечения кривой равнобочной гиперболой.

В книге VI рассматриваются конгруэнтные и подобные сечения двух прямых подобных конусов. Здесь решаются задачи на построение сечения данного конуса, конгруэнтного данному сечению, а также на построение прямого конуса, подобного данному конусу и содержащему данное сечение.

Книга VII, как указывает Аполлоний, являлась подготовительной к утерянной книге VIII. Здесь рассматриваются хорды, параллельные сопряженным диаметрам, и доказываются известные «теоремы Аполлония» о постоянстве суммы квадратов сопряженных диаметров и площади построенного на них параллелограмма и др.

Благодаря применению геометрической алгебры Аполлоний вынужден всякий раз рассматривать различные частные случаи в отдельности. Вследствие этого изложение Аполлония очень громоздко: в семи книгах насчитывается в общей сложности 387 предложений; тем более приходится удивляться мастерству, с которым автор справился с таким множеством трудных задач. Как повествует Гемин, этот труд заслуженно доставил Аполлонию прозвище великого математика, но вместе с тем он вызвал и зависть, проявлением которой были незаслуженные упреки в хвастовстве, а также (у Гераклида, биографа Архимеда) в том, что будто бы Аполлоний присвоил себе неопубликованные работы Архимеда.

Метод Аполлония предвосхитил метод аналитической геометрии. У Аполлония не было координат, но были координатные линии и координатный угол; его координатные линии были обязательно направлены по двум сопряженным направлениям конического сечения, в то время как в аналитической геометрии Декарта расположение этих линий произвольно.

Другие сочинения Аполлония. Другие работы Аполлония известны лишь по их названиям, приводимым Паппом, кроме одной — «Об отсечении в отношении», — в двух книгах сохранившейся в арабском переводе. Другой, утерянный, также двухтомный труд «Об отсечении площади» решал аналогичную задачу. Следующий, также двухтомный труд «Об определенном отсечении» решал во всей общности задачу: Даны четыре точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой. Требуется найти на этой прямой точку P так, чтобы отношение $AP:CP:BP:DP$ имело данное значение. В труде Аполлония устанавливались условия, при которых задача имеет решение, и количество этих решений.

Содержание двухтомного труда «О касаниях» Папп воспроизводит так: Даны три предмета, каждый из которых может быть точкой, прямой или кругом; требуется начертить круг, который проходит через каждую из данных точек (если только точки даны) и касается данных прямых или кругов. Здесь возможны 10 различных случаев, из которых два (даны три точки, или даны три прямых) рассматривались в книге IV «Начал» Евклида. Как видно из замечаний Паппа, Аполлоний решал все эти задачи без применения конических сечений, с помощью линейки и циркуля.

Труд «Плоские места», в двух книгах, был посвящен классификации геометрических мест и изучению в первую очередь «плоских мест» — прямой линии и окружности. Как указывает Папп, здесь Аполлоний, по-видимому впервые, определил геометрические преобразования — гомотетию и инверсию, переводящие плоские места в плоские места (см. [123], стр. 373).

«Вставки» (две книги) представляли собой теории задач, связанных с построением отрезка данной длины так, чтобы прямая, на которой он находится, проходила через данную точку и чтобы концы отрезка лежали на двух данных линиях. Согласно Паппу, Аполлоний ограничился рассмотрением лишь трех задач, решающихся с помощью циркуля и линейки и наиболее полезных для применения в геометрии.

Поскольку Папп, рассказывая об утерянных книгах, приводит множество относящихся к ним лемм, некоторые более поздние математики, среди них и дубровницкий математик Марин Гетальдич (1566—1626 гг.), занимавшиеся изучением античных произведений, попытались восстановить утерянные труды Аполлония. Из идей Аполлония исходили при создании аналитической геометрии Декарт и Ферма. Последнего прозвали «Аполлониус Галликус», т. е. галльским (французским) Аполлонием.

Аполлоний являлся также автором работы «Сравнение додекаэдра с икосаэдром». Ученик Прокла Марин сообщает, что Аполлоний написал также «Общий трактат», в котором, по-видимому, рассматривались общие принципы геометрии, аксиомы, определения и т. д.

Из негеометрических математических работ Аполлония называют две. «Окитóкион» (буквально — «быстрые роды») — сочинение, в котором вычислялось приближенное значение числа π, причем будто бы с точностью, превосходившей точность Архимеда, хотя приближение последнего $3\frac{1}{7}$ считали более пригодным для практики. Считают, что Аполлоний нашел значение $\frac{62832}{20000}$ (т. е. 3,1416). По-видимому, здесь же Аполлоний предложил аналогичную системе Архимеда систему счета по тетрадам (степеням мириад, т. е. 10 000). Системы Архимеда и Аполлония были прообразами нашей регулярной системы счета, в основу которой положены «гектады» — степени 10^6.

Наконец, у Аполлония имелось сочинение о «неупорядоченных иррациональностях», являвшееся, по-видимому, своего рода продолжением книги X «Начал» Евклида.

Аполлонием было также написано сочинение по приложению математики к оптике «О зажигательных зеркалах».

Аполлоний был не только великим математиком, но и выдающимся астрономом своего времени.

Теодосий. Около 150 г. до н. э. жил математик и астроном Теодосий из Битинии (в Малой Азии), который, кроме двух сохранившихся астрономических работ, написал труд «Сферика» — руководство по геометрии шаровой поверхности. Как мы видели, эта геометрия, развивавшаяся издавна в связи с потребностями астрономии, достигла высокого уровня еще во времена Евклида и даже раньше. Она преподавалась наряду с геометрией, арифметикой и музыкой, составляя «квадривиум» пифагорейцев, о ней писали Автолик и Евклид отдельные сочинения. Однако общего руководства или учебника по сферической геометрии не было. Евклид не включил сферическую геометрию в свои «Начала», по-видимому, именно потому, что в его время она считалась частью астрономии, а не геометрии, и ограничился лишь теоремой о пропорциональности объема шара кубу его диаметра и вписанными в сферу правильными многогранниками. «Сферика»

Теодосия, состоящая из трех книг, должна была, следовательно, восполнить существовавший пробел.

В отличие от Евклида, определившего шар как тело, полученное вращением полукруга около его основания, Теодосий определяет шаровую поверхность как такую, все точки которой равно отстоят от данной точки, т. е. по аналогии с определением окружности у Евклида, и, вообще, изложение свойств сферы ведется им совершенно аналогично книге III «Начал», излагающей свойства круга.

Характер математики эллинистических стран. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в период наивысшего расцвета теоретической математики эллинистических стран ее приложения к практике были сравнительно скудны. Объясняется это тем, что слабо развиты были сами естественные науки, и что, следовательно, отсутствовала сама потребность и возможность широкого применения математики. Естествознание состояло, собственно, лишь из начал астрономии и механики. Физика, та наука, которая затем стала основным потребителем математического метода и вместе с тем давала важнейшие стимулы его развития, тогда еще, по существу, не родилась. Развитая во всех подробностях и тонкостях теория конических сечений находила себе применение главным образом в самой математике (да и то в сравнительно незначительной части), а вне ее лишь в гидростатике (плавающие тела у Архимеда). До самого начала XVII в. астрономия удовлетворялась комбинациями круговых движений, и лишь начиная с великого открытия Иоганна Кеплера, теория конических сечений получила широкое применение в естествознании. Некоторые историки математики, например Цейтен ([12], стр. 51), придерживаясь идеалистических взглядов на мир, «объясняют» низкий уровень приложений математики к прикладным задачам тем, что «греки не обладали необходимыми для настоящих вычислений способностями», а также тем, что практические вычисления чаще всего бывают приближенными, между тем как греки стремились в своей геометрии к абсолютно точным определениям. Между тем, как греки, так и другие народы эллинистических стран, широко развившие мореплавание и торговлю, прекрасно справлялись с практическим счетом.

Недостаточное применение математики к естествознанию и технике у большинства математиков этого периода объясняется, следовательно, не мистической особенностью «эллинского духа», якобы устремленного лишь к царству чистых идей, а неразвитостью естествознания и техники этого периода, не нуждавшихся при своем тогдашнем состоянии в большем, чем то, что им давала математика. Ведь как только в астрономии появились новые потребности, математика немедленно взялась за их удовлетворение, не остановившись перед тем, что ей пришлось изменить все направление своего развития, обратиться от чисто теоретических проблем к проблемам вычислительным. Тем же обстоятельством — отсутствием (кроме простейших потребностей механики, земной и небесной, и геометрической оптики) потребностей естествознания в широких математических обобщениях, собственно, объясняется и то, что греческая теоретическая математика, достигнув в трудах Архимеда и Аполлония столь высокого уровня, остановилась на нем, что античная математика прекратила развиваться дальше в этом направлении. Не получая стимулов в виде запросов извне, она не стала дальше развивать те мощные новые методы, которые у нее, по существу, уже имелись — методы будущего дифференциального и интегрального исчислений и будущей аналитической геометрии, а ограничилась лишь доделками казавшейся в общем завершенной системы. Наряду с этой основной причиной столь своеобразного поворота в развитии античной математики действовала и вторая причина, присущая самой античной математике и являющаяся производной от этой основной причины. Метод геометрической алгебры, рассматривая лишь отрезки, площади и объемы, был сам по себе ограничен, не давал возможности обобщений на произвольные величины или, во всяком случае, сильно затруднял такие обобщения, сужал область применения уравнений на квадратные, и сводящиеся к ним кубические и биквадратные. И даже когда позднее Диофант начал вводить символы, упрощающие запись действий, эти символы опять-таки относились лишь к величинам геометрической алгебры.

Однако, если математика эллинистических стран и остановилась в своем развитии на уровне, до которого она поднялась около 200 г. до н. э., было бы тем не менее ошибочным считать, как по крайней мере до недавнего времени считали большинство историков математики на Западе, будто с этого времени наступил период упадка античной математики, для которого появление таких крупных ученых, как Герон Александрийский и Диофант, является лишь блестящим исключением. Существует мнение, что нисходящее развитие математики явилось лишь неотделимой частью общего экономического, политического и культурного упадка эллинистических государств. Подобные утверждения исходят из недооценки практической математики и вообще прикладных знаний отдельными представителями буржуазной интеллигенции. Разумеется, что в конце концов прогрессирующее разложение рабовладельческой системы эллинистических стран привело и к вырождению математики. Однако, как мы видели, оба процесса вовсе не происходили одновременно. Античная математика не только не начала вырождаться, а, наоборот, достигла своего наивысшего расцвета тогда, когда уже давно начался и продолжался период политического упадка эллинистических стран; только лишь с III в. н. э. и математика начала приходить в упадок.

Таким образом, изменение, совершившееся в направлении античной математики, от чисто теоретического к прикладному и вычислительному, неправильно считать признаком ее упадка, это изменение не было вызвано распадом античного общества, оно вытекало из особенностей самой античной математики, методы которой по существу исчерпали себя, и из состояния естествознания, которое не ставило перед математикой задачи новых широких обобщений, а, находясь в периоде первоначального накопления и систематизации наблюдений, требовало, чтобы она приспособилась к вычислительным задачам.

Нельзя по этому случаю не отметить, что данный исторический факт убедительно опровергает распространенное измышление идеалистов, будто математика диктует естествознанию, является основной движущей силой его развития, в то время как дело происходит как раз наоборот: как бы ни было велико значение математики для естественных наук, и какую бы относительную самостоятельность она не имела в своем развитии, тем не менее в общем и целом развитие математики подчинено развитию естествознания и техники.

ГЛАВА V

МАТЕМАТИКА В СТРАНАХ РИМСКОЙ ИМПЕРИИ

Математика римлян. Математические знания возникли и развивались в Древнем Риме на основе развития техники и естествознания как самих римлян, так и других народов, заселявших Апеннинский полуостров, и прежде всего этрусков, а также благодаря усвоению достижений других народов Средиземноморья, главным образом греческой математики.

Сравнение числовых знаков этрусков и древнейших римлян показывает значительное сходство. Этруски писали:

5=Λ *или* V; *10*=X *или* +; *50*=↑ *или* ↓; *100*=⊕; *1000*=8,

а римляне:

5=V; *10*=X; *50*=Ψ *или* ↓, *или* ↑, *или* ⊥, *или* L; *100*=Θ; *1000*=ↀ.

Числовые знаки этрусков были буквами, однако обозначали ли они начальные буквы числительных, или просто буквы алфавита в их последовательности, — это окончательно не установлено.

Около 500 г. до н. э. римляне познакомились с греческим алфавитным способом записи чисел, но сами не переняли его. Римские цифры I, V, X, L, C, M возникли, возможно, и так, что первоначально имелись лишь цифры I, X, C, M, из которых каждая была образована из предыдущей путем добавления одной черточки, перекрещивающей знак и обозначавшей удесятерение («декуссатио», — означает и удесятерение и перекрещивание); знаки V и L возникли позднее, являясь половинами знаков X и C. При этом окончательное начертание знаков C и M приспособилось к начальным буквам латинских названий 100 «centum» и 1000 «mille». Еще позднее возникли промежуточные знаки *D* для 500 и ϛ для 6, из которых последний вскоре вышел из употребления.

Сходство между этрусской и древнеримской записью чисел не ограничивается, однако, только формой знаков, а распространяется на самый принцип образования сложных чисел из основных. Это принцип вычитания. Римляне писали 4 = IV, 8 = IIX, 9 = IX, 40 = XL, 90 = XC, 400 = CD так же как и этруски, с той только лишь разницей, что последние, поскольку у них направление всего письма было обратное, чем у римлян, ставили вычитаемый знак не слева, а справа от основного знака. Кроме того, этруски применяли вычитание чаще, чем римляне. Они писали, например, так: $47 = \uparrow|||$ и даже с двойным вычитанием $38 = 50 - 10 - 2 = \uparrow X||$. Следует также отметить, что как этруски, так и римляне применяли принцип вычитания только при записи чисел, но не в языке, за исключением числительных, в которых один или два вычитается из 20, 30 и т. д. до 100, например, 18 = «дуодевигинти» (два из двадцати), или 99 = «ундецентум» (один из ста). Постепенно обозначения установились; некоторые, например IIX, были отброшены. Для обозначения чисел, больших 1000, ставились над числовыми знаками различные значки; горизонтальный штрих обозначал увеличение в 1000 раз, например, $\overline{\mathrm{XXX}} = 30\,000$.

Для дробей у римлян существовала двенадцатеричная система обозначения, причем каждая дробь от $\frac{1}{12}$ до $\frac{11}{12}$ имела свой знак и свое название. Таким образом, римляне говорили и писали, например, не $\frac{1}{8}$, а «полторы двенадцатых». Происхождение этой системы неизвестно.

Процесс счета римляне осуществляли тремя различными способами. Наиболее древним был счет на пальцах, начинающийся с левой руки и переходящий к правой, причем каждому из пальцев придавалось значение в зависимости от его положения. Плиний рассказывает, что еще легендарный царь Нума Помпилий (конец VIII — начало VII вв. до н. э.) велел воздвигнуть статую двуликого Януса, пальцы которого изображали число 355, считавшееся тогда числом дней в году.

Второй способ, которым пользовались римляне, был счет на абаке (рис. 37), часто доске, покрытой пылью или песком, на которой проводили черточки, разделяющие ее на столбцы, и клали камешки «калькули», откуда, как мы уже отмечали, и произошло слово «калькуляция». Но имелись и более совершенные абаки, с металлическими выемками, в которых находились подвижные, снабженные головкой штифтики. Выемок, прямолинейных и параллельных, было восемь длинных и 11 коротких; штифтиков было в одной из длинных выемок пять, в остальных по четыре, а в коротких по 1, кроме одной, в которой имелось две. Короткие выемки стояли сверху над длинными, являясь как бы их продолжением; в промежутке были выгравированы обозначения. Абак, снабженный подставкой, ставился вертикально перед считающим. Находящаяся над последней длинной выемкой справа короткая выемка была снабжена знаком и обозначала унции, 12 унций составляли одну ассу — меру веса золота и денег; ассам были отведены длинные выемки, снабженные слева направо знаками I, X, C и т. д. до миллиона. Три короткие выемки справа были для $\frac{1}{2}$ унции «семунция», $\frac{1}{4}$ унции «сициликвус» и $\frac{1}{3}$ унции «дуэлла». Счет на абаке производился передвижением камешков или штифтиков и не представлял трудностей для сложения и вычитания. Для умножения и деления приходилось промежуточные результаты отмечать отдельно. Приходилось пользоваться таблицей умножения, знать ее на память, или иметь ее всегда под рукой. Сохранившееся в литературе описание доносившихся из римской школы до прохожего звуков заучиваемой мальчиками таблицы умножения, громко скандировавших «бис бина кватуор» ($2 \times 2 = 4$) под свист розг и вопли наказуемого, свидетельствуют о том, что устный счет был в Древнем Риме широко распространен. Для облегчения действий с большими числами и дробями существовали счетные таблицы, сохранившиеся на протяжении всего средневековья. Отметим еще, что, как пережиток весьма отдаленного времени, когда число 600 считалось границей чисел, латинское слово «сексценти» употреблялось в значении «бесконечно многие».

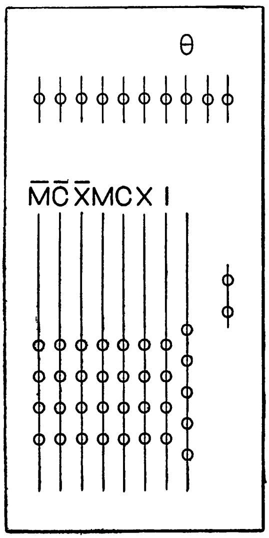


Рис. 37.

Наряду со счетом другим источником математических знаний римлян было измерение земли — практическое землемерие. Как сообщает Марк Теренций Варрон в своем сочинении «О сельском хозяйстве» (50 или 80 г. до н. э.), умение измерять земельные участки римляне переняли у этрусков. Размежевания происходили при основании городов и лагерей, постройке дома, дворца или храма, само название которого («темплум») происходит от греческого «темнеин» — «отрезать» (землю). При закладывании города, постройки или полевого участка лежащий в основе прямоугольник ориентировали обязательно по направлениям стран света, а чаще всего по направлению к восходу Солнца в день, когда производилась закладка. Авгур проводил сначала эти прямые, названные «дециманус» и «кардо», причем для этого пользовались тремя различными методами, описанными землемером Гигином около 100 г. н. э. при помощи приборов «кардо», «грома» и сциотерум».

Римляне пользовались также измерительным стержнем — земельные участки имели первоначально форму квадратов, а затем прямоугольников с отношением сторон 2 : 1. С помощью своих простых приборов они решали и такую задачу, как измерение ширины реки без перехода на другой берег. Однако они не пользовались при этом пропорциональностью подобных треугольников, а изображали необходимые треугольники в натуральную величину прямо на земле и затем их измеряли, — метод, которым пользовались североамериканские индейцы до европейской колонизации.

Немногочисленные, дошедшие до нас памятники не дают возможности последовательно проследить за развитием математики у римлян, как это можно было сделать относительно древнегреческой и эллинистической математики. В литературе не отмечено ни одного крупного математического открытия римлян, ни одного выдающегося математика. Вопрос о том, почему римляне, в отличие от греков, не оставили после себя в области математики, как и в области естествознания, самостоятельных теоретических работ сколько-нибудь крупного значения, конечно, не решается ссылкой на пресловутый «национальный дух». Как это отмечал еще Цицерон, римляне устремили свое внимание к прикладным знаниям. Полное научное объяснение этого вопроса на основе исследования социально-экономических особенностей римского общества еще впереди. Несомненно, что военная техника римлян, их гидротехника, строительное дело и землемерие, а также развивающаяся в связи с завоеваниями география требовали немалых математических знаний. Однако одной из несомненных причин того, что Рим не стал столицей науки своего времени, было то, что такая столица науки в Римской империи уже была. Это была унаследованная Римом от периода эллинизма Александрия.

Александрия в римскую эпоху. Римляне, создавая свою империю, охватывающую все Средиземноморье, завоевали и главные эллинистические страны, в том числе Грецию и царства Птолемеев и Селевкидов. Завоевание птолемеевского Египта было завершено римлянами в 30 г. до н. э. Александрия сохранила при римлянах свое положение научного центра, став центром науки всей Римской империи. Сохранился в римскую эпоху и греческий язык в качестве международного языка науки; латинский язык стал международным языком науки значительно позже, после того как он стал языком католической религии.

Однако характер математики в Александрии в римскую эпоху резко отличается от математики периода эллинизма. Основной причиной изменения характера математики было широкое усвоение в Александрии традиций математиков и астрономов Вавилона. Процесс усвоения этих традиций начался еще до римского завоевания, но связи между Египтом и Месопотамией, усилившиеся во время римских войн, значительно ускорили этот процесс. В результате усвоения вавилонских традиций область практического применения математики расширилась, в особенности за счет применения к астрономии; на первое место начинает выдвигаться вычислительная математика, в частности, возникает необходимая для астрономии тригонометрия. Это дало повод некоторым буржуазным историкам, мыслящим метафизически и рассматривающим математику только как абстрактную науку, говорить об «упадке» математики этого периода. Эти широко распространенные идеалистические взгляды недавно подверг справедливой критике Нейгебауэр [71].

Гиппарх. Рассмотрение александрийской математики римской эпохи мы начнем с александрийских ученых периода, предшествующего римскому завоеванию, на которых уже чувствовалось влияние вавилонских астрономов. Одним из первых таких ученых был величайший астроном древности Гиппарх, происходивший из Никеи в Битинии. Хотя даты рождения и смерти Гиппарха неизвестны, не подлежит сомнению, что его деятельность падает на вторую половину II в. до н. э. Как астроном, Гиппарх прославился открытием прецессии (предварения равноденствия), чрезвычайно точным вычислением длины солнечного года и среднего лунного месяца, наклона эклиптики и др. При этом он опирался на знания вавилонян — полученные им результаты совпадают с данными клинописных таблиц того времени. Он усовершенствовал вычисления Аристарха объемов и расстояний Солнца и Луны. Для объяснения видимых движений Солнца, Луны и планет Гиппарх пользовался, подобно Аполлонию, гипотезами эпициклов и эксцентрических кругов. Гиппарху приписывают (в связи с его астрономическими работами) открытие стереографической проекции сферы на плоскость. Он составил каталог около 1000 звезд. Ему принадлежит также усовершенствование астрономических инструментов. Гиппарх применил астрономические знания к географии, ввел понятия географической широты и долготы и определял последние при помощи наблюдений над затмениями Луны. Он написал также сочинение «О телах, влекомых вниз своим весом», применив учение Аристотеля к небесным телам.

Хотя сочинения Гиппарха, кроме одного, не дошли до нас, однако Птолемей излагает их достаточно подробно, в том числе и важнейшее из них для математики — о хордах круга. Гиппарх делил окружность на 360 градусов, а ее диаметр на 120 частей, считая $\frac{1}{120}$ диаметра единицей, с помощью которых он выражал длины хорд. Части окружности и диаметра назывались «мойрами»; 30 мойр составляли «созвездие», так что в круге было 12 созвездий, как в круге Зодиака. Каждая мойра как окружности, так и диаметра делилась на 60 первых «лепт», каждая первая лепта делилась на 60 «вторых лепт» и т. д. В дальнейшем шестидесятеричные дроби стали применяться в Александрии не только в астрономии и для деления круга, но и для произвольных вычислений. Шестидесятеричные цифры от 1 до 59 обозначались с помощью алфавитной нумерации. Недостающие разряды обозначались либо пропуском между цифрами, либо кружочком; по мнению одних ученых кружочек, — первая буква греческого слова οὐδέιν (удейн — «никакой»), по мнению других, кружочек обозначал «псефос» — круглый камешек с дыркой, при счете на абаке заменявший нуль (числовое значение буквы ο было равно 70, так что эта буква не могла быть принята за одну из значащих цифр шестидесятеричной системы). Сложение и вычитание шестидесятеричных дробей производилось так же, как производятся эти действия с десятичными дробями. Умножение дробей производилось двумя способами: либо как для целых чисел, либо сначала каждый множитель превращали в одноименную общую дробь, а затем, как и мы, множили числитель на числитель и знаменатель на знаменатель. При умножении шестидесятеричных дробей некоторую трудность составляло определение разряда результата. Для этого применялось правило сложения разрядов множителей, записываемых над цифрами; в этом правиле в зачаточном виде содержалась идея логарифмов. Аналогично умножению производилось деление дробей и смешанных чисел.

Установив численные зависимости между углами и хордами, т. е. выражаясь современным языком, найдя некоторые предложения сферической тригонометрии, Гиппарх сумел решить задачу определения времени восхода и захода звезд для разных широт. Что же касается таблиц Гиппарха, то не имеется достаточного количества данных, чтобы установить, насколько они отличались от таблиц Птолемея.

О Гиппархе сообщают также, что он занимался теорией соединений, решением задачи о числе возможных выводов из 10 аксиом или предположений.

Посидоний. Из современников Гиппарха называют Аполлодора, занимавшегося логистикой, т. е. практической арифметикой.

К этому же времени относят и Посидония (около 135—51 гг. до н. э.), последователя стоической философии, учителя Цицерона, родом из Апамеи, преподававшего на острове Родосе. Посидоний занимался измерением величины Земли, а также диаметра Солнца. В области самой геометрии Посидоний интересовался вопросами ее обоснования и написал сочинение, опровергавшее взгляды эпикурейца Зенона Сидонского, критиковавшего «Начала» Евклида за то, что их теоремы на деле нельзя вывести из одних только приведенных в них аксиом, постулатов и определений, а что для этого всякий раз втихомолку делают множество допущений, не включенных в основные принципы. Вопросы логического обоснования геометрии, в особенности теория параллельных Евклида, начали в это время все больше интересовать математиков.

По свидетельству Прокла, Посидоний исходит из определения параллельных линий как равноотстоящих прямых. Он определяет их так: «Параллельными называются такие прямые, которые, находясь в одной плоскости, не сближаются и не удаляются одна от другой, так что все перпендикуляры, проведенные из точек одной из них к другой, равны между собой» ([78], стр. 176). Но само предположение о том, что геометрическое место точек, равноотстоящих от прямой, есть прямая, равносильно V постулату.

Гемин. Во второй половине I в. до н. э. жил Гемин Родосский, ученик Посидония; не дошедшие до нас работы Гемина, цитированные Проклом, Паппом и Евтокием, содержали много указаний, послуживших выяснению различных вопросов истории греческой математики. Согласно Евтокию Гемин был автором «шести книг о математических теориях». Это была своего рода энциклопедия математических наук, содержавшая арифметику, геометрию, механику, астрономию, оптику, геодезию, «канонику» (музыкальную гармонию), логистику. Здесь содержались обширные комментарии к «Началам» Евклида. Из сохранившихся отрывков, по-гречески или в арабском переводе, видно, что труд этот был посвящен исследованию логических принципов, на которых строилась математика, и их защите против критики эпикурейцев и скептиков.

Давая отпор философам, отрицавшим необходимость и возможность логического обоснования геометрии, Гемин вместе с тем критиковал и Аполлония за то, что тот пытался доказывать аксиомы, и Евклида за то, что он принял в качестве аксиом то, что на самом деле следует доказать, а именно, IV постулат о равенстве всех прямых углов, и V — о параллельных. О последнем Гемин заметил, что у Евклида имеется доказательство обратной теоремы (кн. I, предложение 17). Гемин, так же как и Посидоний, дает определение параллельных прямых как равноотстоящих. Исходя из этого определения, он сначала выводит все предложения Евклида о параллельных, а затем «доказывает» V постулат ([78], стр. 176—177). Кроме того, он принимает без доказательства предложение, что на плоскости из данной точки можно провести лишь одну прямую, параллельную данной прямой, которое опять-таки доказывается с помощью V постулата.

Гемин был автором большого астрономического труда «Метеорологика». Кроме того, Гемину приписывается астрономическое сочинение «Введение» («Исагогэ́»), которое можно считать учебником или руководством.

Менелай. В конце I в. н. э. жил Менелай Александрийский, автор «Сферики». О двух других геометрических сочинениях Менелая — «Элементы геометрии» и «Книга о треугольниках», — известно из арабских источников.

Полагают, что в первом из них среди прочего решалась задача удвоения куба при помощи кривой, которую Менелай назвал «парадоксальной» и о которой Таннери сделал предположение, что это была кривая двойной кривизны, получающаяся при пересечении шара прямым круговым конусом, диаметр которого равен радиусу шара, и образующая которого проходит через центр шара. Эта кривая, являющаяся частным случаем гиппопеды Евдокса, известна под названием кривой Вивиани (1622—1703 гг.); ее проекция на касательную плоскость является лемнискатой Бернулли.

Сохранившийся в арабском переводе трехтомный труд Менелая «Сферика» впервые в истории содержит понятие сферического треугольника [124].

Книга I посвящена основным предложениям о сферических треугольниках, аналогичных предложениям «Начал»

Евклида, относящихся к прямолинейным треугольникам. В случае, когда у Евклида встречаются предложения, не имеющие полной аналогии в сферической геометрии, Менелай заменяет их соответствующими предложениями. Так, например, он доказывает, что сумма внутренних углов сферического треугольника больше двух прямых.

Книга II «Сферики» Менелая имеет то же содержание, что и книга III одноименного сочинения Теодосия, однако доказательства даны здесь значительно короче и яснее.

Лишь книга III содержит собственно тригонометрию. Конечно, здесь, как и вообще нигде в древности, не употребляется понятие синуса, равно как и других тригонометрических функций: ту роль, которую в нашей тригонометрии играют линии синуса, у Менелая играют хорды; линию синусов угла α можно рассматривать как половину хорды, стягиваемой углом 2α, т. е. (рис. 38):

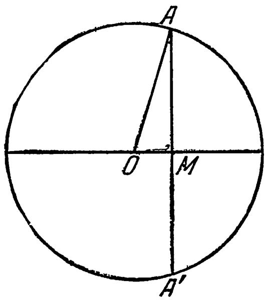


Рис. 38.

$$\sin\alpha = \frac{AM}{AO} = \frac{AA'}{2AO}.$$

В книге III доказывается знаменитая теорема Менелая, получившая позже название теоремы о секущих, или правила шести величин. В этой теореме изучается фигура, образованная на плоскости или сфере четырьмя прямыми или, соответственно, дугами больших кругов, из которых каждая пересекает остальные в трех точках; эта фигура, которую в Средние века называли «фигурой секущих», называется теперь полным четырехсторонником.

Для плоского случая теорема Менелая (рис. 39), которую математики древности формулировали в терминах учения о составных отношениях, может быть записана в виде

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{FD}\,\frac{BD}{AB}; \tag{1}$$

для сферического случая в равенстве (1) следует заменить отрезки на хорды удвоенных сторон или, в современных обозначениях, на синусы сторон:

$$\frac{\sin CE}{\sin AE} = \frac{\sin CF}{\sin FD}\cdot\frac{\sin BD}{\sin AB}. \tag{2}$$

Полный четырехсторонник можно рассматривать также как фигуру, образованную одним из четырех треугольников

ACD, ABE, ECF и DBF при пересечении соответственной секущей трансверсалью BFE, CFD, BDA и CEA. Поэтому теорему Менелая можно записать в четырех вариантах, из которых в его «Сферике» указаны первый и третий (второй

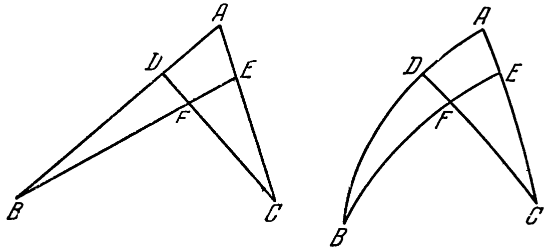


Рис. 39.

симметричен относительно первого, четвертый относительно третьего); третий вариант имеет вид

$$\frac{\sin AC}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DF} \cdot \frac{\sin BF}{\sin BE}. \qquad (2')$$

Плоский случай теоремы Менелая был, по-видимому, известен еще Евклиду.

Менелай пользовался как общеизвестной теоремой об ангармоническом отношении четырех больших кругов, проходящих через общую точку. Следовательно, эта теорема была известна еще до Менелая.

Никомах. Около 100 г. н. э. неопифагореец Никомах из Герасы в Палестине написал «Введение к арифметике» [125], которое следует считать не столько научным произведением, сколько популярным введением в пифагорейское учение о числах. По уровню изложения оно далеко отстает от Евклида. Никомах не дает настоящих доказательств, а только подтверждает предложения конкретными примерами. Из содержания «Введения к арифметике», кроме классификации чисел и отношений между ними, включая и многоугольные, пирамидальные и другие фигурные числа, заслуживает внимания, что Никомах, не давая формулы суммирования кубов чисел, тем не менее указывает, что в ряду нечетных чисел 1, 3, 5, 7, 9, 11... кубами являются 1, $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, ...

Клавдий Птолемей. Знаменитый греческий астроном, географ и оптик Клавдий Птолемей, производивший с 127 по 151 г. в Александрии свои наблюдения и умерший около 168 г., написал «Математическое собрание в XIII книгах», получившее позднее арабизированное название «Алмагест» (от греческого

«Μεγίστη σύνταξιζ»— «Величайшее построение») [126]. Этот труд является превосходным изложением всех астрономических знаний того времени. Здесь, в частности, подробно изложена геоцентрическая система Птолемея. В «Алмагесте» систематически изложена тригонометрия хорд.

Тригонометрия Птолемея. Книга I «Алмагеста» начинается сжатым изложением предложений плоской и сферической тригонометрии, необходимых для составления таблицы хорд (синусов) и пользования ею. Птолемей делит круг на 360, а его диаметр на 120 равных частей (ч) и выражает доли их в шестидесятеричной системе. Так, хорда $60° = 60^ч$, хрд $90° = \sqrt{2 \cdot 60^2} = \sqrt{7200} = 84^ч 51' 10''$, хрд $120° = \sqrt{3 \cdot 60^2} = \sqrt{10800} = 103^ч 55' 23''$, хрд $36° = 37^ч 4' 55''$, хрд $72° = 70^ч 32' 3''$ [1]). Хорды 72° и 36° Птолемей получил при помощи «золотого сечения» как стороны вписанных в круг правильных пяти- и десятиугольников; извлечение квадратных корней производилось, как это видно из комментария Теона Александрийского, способом последовательного подбора, основанного на формуле $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.

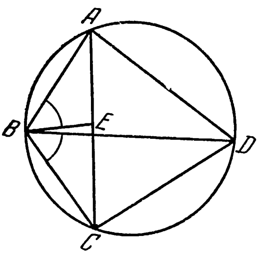


Рис. 40.

Из этих значений Птолемей получает затем дальнейшие на основании предложения $(\text{хрд}\,\alpha)^2 + (\text{хрд}\,180° - \alpha)^2 = (\text{диаметр})^2$, которому соответствует формула $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; так, из хрд 72° получается хрд 108°, из хрд 36° получается хрд 144° и т. п.

Для того чтобы найти хрд $(\alpha - \beta)$, когда известны хрд α и хрд β, Птолемей сначала доказывает теорему, названную его именем (рис. 40): если $ABCD$ — вписанный в круг четырехугольник, то $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$. Теорему Птолемея доказывают, проводя BE до пересечения с AC так, чтобы углы ABE и DBC были равны. Из подобия треугольников ABE и DBC, а также ABD и BCE следует записанное выше равенство. В частном случае, когда AD является диаметром круга, получается предложение для хорд, равносильное тригонометрической формуле

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

---

[1]) Здесь мы пользуемся обозначениями: $1^ч = \frac{1}{120}$ диаметра, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^ч$, $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$; хрд обозначает хорду.

Таким путем Птолемей вычислил хрд $12^\circ =$ хрд $(72^\circ - 60^\circ) = 12^ч 32'36''$.

Для вычисления хорд небольших дуг ему нужно было уметь находить хорду половинной дуги, если известна хорда целой, и поэтому Птолемей доказал предложение, равносильное формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. С его помощью он получил значения для хрд 6°, хрд 3°, хрд $1\frac{1^\circ}{2}$ и хрд $\frac{3^\circ}{4}$.

Для того чтобы иметь возможность построить таблицы хорд, вычисленных через $\frac{1^\circ}{2}$, нужно было сначала вычислить еще хрд 1° как значение, промежуточное между хрд $1\frac{1^\circ}{2}$ и хрд $\frac{3^\circ}{4}$, а затем иметь формулу для вычисления хрд $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^\circ$ из хрд α°. Для последнего Птолемей, применив свою теорему, получил правило, равносильное формуле

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

а для интерполирования вывел предложение, равносильное формуле

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta\right).$$

Отсюда он нашел, что $\frac{4}{3}$ хрд $\frac{3^\circ}{4} >$ хрд $1^\circ > \frac{2}{3}$ хрд $1\frac{1^\circ}{2}$ или с хорошим приближением хрд $1^\circ = 1^ч 2'50''$, откуда хрд $\frac{1^\circ}{2} = 0^ч 31'24''$.

Этих данных было достаточно для построения таблиц хорд, соответствующих углам от $\frac{1^\circ}{2}$ до 180° через $\frac{1^\circ}{2}$, что равносильно таблице синусов от $\frac{1^\circ}{4}$ до 90° через $\frac{1^\circ}{4}$.

Для приближенного нахождения хорд более мелких делений Птолемей допускает прямую пропорциональность приращений; в третьем столбце его таблицы помещается $\frac{1}{30}$ разности между значениями хрд $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^\circ$ и хрд α°. При этом он замечает, что вычисленное этим путем значение лишь приближенное и что его следует проверить, например, путем нахождения хорды удвоенной дуги и сравнения с известными значениями.

Из полученного значения для хрд 1° Птолемей нашел для окружности круга с диаметром, равным $120^ч$, значение

$360 \cdot 1^{ч} 2' 50''$ или $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3{,}14166...$ Для $\sqrt{3} = 2$ хрд $120° = 1 + \frac{43}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3} = 1{,}7320509$.

В целом таблицы Птолемея, служившие в течение многих веков для решения треугольников, точны до пяти десятичных знаков включительно.

Что же касается сферической тригонометрии, то все нужные ему предложения Птолемей выводит из теоремы Менелая. При этом он не употребляет понятия прямоугольного сферического треугольника, а говорит о дугах пересекающихся больших кругов и имеет дело лишь с хордами (равносильными синусам) стягиваемых дуг и их дополнений (хорды этих дополнений равносильны косинусам).

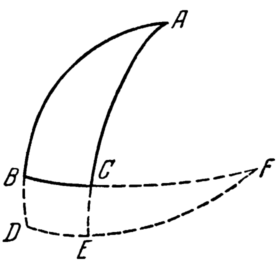


Рис. 41.

С помощью теоремы Менелая Птолемей в своем «Алмагесте» решил четыре случая прямоугольного в вершине C сферического треугольника: 1) по данным катетам a, b; 2) по катету b и гипотенузе c; 3) по гипотенузе c и углу B и 4) по катету a и противолежащему углу A. Используемые при этом зависимости между элементами треугольника в современных обозначениях таковы:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \cos c = \cos a \cdot \cos b, \\ 2) & \cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c, \\ 3) & \sin b = \sin c \cdot \sin B, \\ 4) & \sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} A. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Все эти зависимости без труда получаются из теоремы Менелая при соответствующем выборе сторон фигуры. Например, чтобы решить прямоугольный в вершине E треугольник CEF по данным катетам $EF = a$, $CE = b$ (рис. 41), Птолемей берет полюс B относительно стороны CE, экватор BDA относительно полюса C и большой круг BFE. Тогда $AC = CD = 90°$, $BE = 90°$, $BF = 90° - a$, $AE = 90° - b$, $DF = c$ и из (2′) (стр. 189) следует:

$$\cos c = \cos a \cos b; \quad (1_1)$$

угол C измеряется дугой AD и из (2) (стр. 188) получается

$$\cos C = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c. \quad (1_2)$$

Птолемей оставил в стороне случаи данных катета и прилежащего угла и двух данных углов, которые ему не понадобились. Косоугольные треугольники Птолемей решает в случаях, когда даны

1) a, B, C; 2) a, c, B; 3) a, b, A и 4) a, B, A.

Все они приводятся к только что указанным четырем случаям прямоугольных треугольников путем проведения высоты к стороне c.

Другие сочинения Птолемея. Кроме «Алмагеста», Птолемей оставил нам «Съемку» («Аналемма») и «Планисферий» — астрономические сочинения, широко применяющие математику. Первое, как и одноименное сочинение Диодора Александрийского, излагает теорию ортогональной проекции небесной сферы на три взаимно перпендикулярные плоскости: меридиана, горизонта и первого вертикального круга. С помощью этих проекций решалась задача нахождения положения Солнца над горизонтом в определенный день и час для определенной широты, причем на основании графического построения вычислялось зенитное расстояние Солнца. Теми же методами, пользуясь предложениями, равносильными формулам для решения сферических треугольников, Птолемей находил дугу 2α, описываемую над горизонтом звездой, имеющей данное наклонение δ,

$$\cos\alpha = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi,$$

где φ — высота полюса над горизонтом.

«Планисферий» — сочинение, сохранившееся лишь в латинском переводе с арабского перевода, излагает стереографическую проекцию небесной сферы, т. е. проекцию северной полусферы на плоскость экватора из точки, помещенной в южном полюсе. Здесь, как и во многих других сочинениях Птолемея, по-видимому, изложены результаты Гиппарха. Птолемей указывает, что проекцией любого круга, как большого, так и малого, будет опять круг (за исключением больших кругов, проходящих через полюс, которые проецируются как прямые), но он не дает общего доказательства этого важного предложения, а доказывает его лишь для частных случаев — для эклиптики, горизонта и т. п., хотя это доказательство вытекает из изученных в «Конических сечениях» Аполлония свойств круговых сечений косого кругового конуса. О другой важнейшей особенности стереографической проекции — о сохранении величины углов — Птолемей также не упоминает.

Теория параллельных Птолемея. Прокл сохранил для нас в пересказе содержание сочинения Птолемея, посвященного постулату о параллельных ([78], стр. 365—368). Желая доказать V постулат Евклида, Птолемей пересекает прямые (рис. 42) AB и CD прямой $EFGH$ и пытается доказать, что если прямые AB и CD параллельны, то сумма углов AFG и CGF равна двум прямым углам. Доказательство он ведет от прогивного. Допустим, рассуждает он, что эта сумма не равна двум прямым. Тогда она должна быть 1) либо больше двух прямых, 2) либо меньше двух прямых. Рассмотрим случай 1). Если она больше, то сумма углов BFG и FGD как смежных должна быть меньше двух прямых. Но AF и CG не более параллельны, чем FB и GD, *а следовательно, если FG образует одну пару углов AFG и FGC в сумме бо́льших, чем два прямых, то она должна также образовать и другую пару углов BFG и FGD, равным образом в сумме бо́льших, чем два прямых угла.* Но раньше было доказано, что эта вторая пара углов меньше двух прямых, а следовательно, мы пришли к противоречию. Значит, сумма углов AFG и FGC не может быть больше двух прямых. 2) Точно так же можно показать, что сумма углов AFG и FGC не может быть меньше двух прямых. Таким образом, доказано, что она не может быть ни больше, ни меньше двух прямых, а следовательно, доказано, что она равна двум прямым.

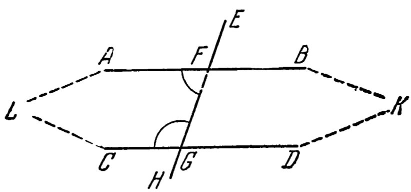


Рис. 42.

После этого Птолемей доказывает, наконец, и V постулат методом от противного. Допустим, что прямые AB и CD, образующие с прямой EH углы, сумма которых меньше двух прямых, не пересекаются по ту сторону, где находятся эти углы. Тогда тем более они не могут пересекаться по другую сторону, где находятся углы, сумма которых больше двух прямых, ибо это противоречило бы 16 предложению книги II «Начал», в силу которого внешний угол треугольника больше, чем любой из внутренних, не смежных с ним углов. Значит, эти прямые не встречаются ни по одну, ни по другую сторону пересекающей их прямой, а следовательно, они параллельны. Однако, как мы только что доказали, в этом случае сумма углов с пересекающей их прямой будет равна двум прямым, а это противоречит предположению. Следовательно, наши прямые должны пересекаться, Во всем этом доказательстве Птолемей допустил логическую ошибку, отмеченную здесь курсивом. Утверждая, что в случае непересекающихся прямых внутренние односторонние углы по одну и по другую сторону от секущей в сумме составляют равные углы, содержит утверждение, равносильное доказываемому V постулату. Мы столь подробно изложили эту неудачную попытку Птолемея потому, что она является исторически первой, в подробностях дошедшей до нас, из тех многочисленных попыток доказать V постулат, которые делались математиками разных веков и стран.

Оптические, механические, географические работы Птолемея. Кроме нескольких менее крупных астрономических сочинений, Птолемей написал работу по оптике, сохранившуюся (не полностью) в латинском переводе с арабского. В ней излагается теория зеркал, а в последней, V книге — теория преломления света.

Птолемею приписывают также сочинение по механике, в котором описывалось его изобретение: весы — безмен в виде разноплечного рычага-шкалы, с подвижной гирей-бегунком.

В пользовавшемся большой известностью восьмитомном труде «География» Птолемей, использовав картографическую проекцию Марина из Тира (I в. н. э.), указал широты и долготы 8000 пунктов земной поверхности. Здесь содержалась идея координат — чисел, определяющих точки земной поверхности.

Симпликий сообщает, что Птолемей был автором сочинения «Об измерениях», где доказывалось, что тело не может иметь более трех измерений.

Математика в Риме при Юлии Цезаре и Августе. Наука александрийских ученых проникает в Рим при римском императоре Юлии Цезаре (104—44 гг. до н. э.). В I веке до н. э., в период наивысшего расцвета римского рабовладельчества, когда на основании бесчеловечной эксплуатации все возрастающего (благодаря завоеваниям) количества рабов техника производства достигла наивысшего уровня, римская математика, вместе с архитектурой, гидротехникой, географией и, конечно, военной техникой, переживает период подъема.

Сам Юлий Цезарь был автором сочинения («De astris») «О звездах», целью которого была реформа календаря. В 450 г. до н. э. прежняя длина года в 355 дней была исправлена тем, что каждые два года вставляли лишний месяц, число дней которого по очереди насчитывало 22 и 23 дня. Однако благодаря этому год стал слишком длинным, а поэтому стали опускать один из вставных месяцев, делая это сначала беспорядочно, а затем через каждые 24 года. Вследствие этого хронология запуталась настолько, что образовалась разность в 85 дней между фактическим и номинальным наступлением равноденствий. Побывав в 48—47 гг. в Египте, Цезарь, по совету александрийского ученого Сосигена, решил перенять александрийский календарь из 365 дней с каждым четвертым високосным годом, в котором между 23 и 24 февраля вставлялся один лишний день. Новый календарь был введен в 45 году до н. э. Цезарь занимался также вопросом организации общего обмера земель всей Римской империи. Однако написанное им об этом сочинение не дошло до нас, а сам обмер был осуществлен лишь при Августе (63 г. до н. э.— 14 г. н. э.), который поручил руководство обмером выдающемуся полководцу и строителю Марку Випсанию Агриппе. Картографические работы, в которых участвовал римский дорожный инженер Бальб и грек Герон Метрик, ошибочно отождествляемый некоторыми историками с Героном Александрийским, длились с 37 по 20 г. до н. э. В результате была создана большая карта римского мира, получившая название по имени Агриппы, выставленная для публичного обозрения в особо построенном портике. Описание карты, данное Агриппой, послужило источником для «Естественной истории» Плиния.

Благодаря этим работам римляне ознакомились с александрийскими сочинениями по практическому землемерию и геодезии, а позднее и с трудами Герона Александрийского. Были введены более совершенные землемерные приборы, применялись более точные формулы для вычисления площадей, границы которых отличались от прямоугольных. Марк Теренций Варрон (около 116—27 г. до н. э.) — разносторонний учёный, был автором ряда математических сочинений, к сожалению, не дошедших до нас: «Измерения» («Mensuralia»), «Геометрия», в которой фигура Земли представлялась яйцеподобной, трактата «Аттический, или о цифрах» («Atticus sive de numeris», изложение римской арифметики), а также 9-томной энциклопедии, 4-я и 5-я книги которой были посвящены геометрии и арифметике, а 9-я — архитектуре.

Во второй половине I в. до н. э. жил Витрувий, военный инженер при Юлии Цезаре и Августе, крупный строитель и архитектор, по-видимому, наблюдавший за сооружением и работой акведуков. Витрувий является автором труда «Десять книг об архитектуре» [127], законченного им около 14 г. до н. э., уже на склоне жизни. В этой энциклопедии зодчества имеется ряд мест, так или иначе относящихся к математике и обнаруживающих значительные знания автора в этой области. Витрувий рассуждает об отношениях величин отдельных частей человеческого тела, дает очерк учения Аристоксена о гармонических отношениях, описания трех, по его мнению, наиболее важных математических открытий, а именно, несоизмеримости диагонали и стороны квадрата, пифагорейского треугольника со сторонами 3, 4, 5 и определения веса короны. Даются описания землемерных инструментов и указания, как ими пользоваться. При описании измерения расстояний Витрувий принимает периметр колеса, диаметр которого равен $4\frac{1}{6}$ фута, равным $12\frac{1}{2}$ фута, т. е. он полагает $\pi=3$. Витрувий пользовался чертежами планов и фасадов зданий, являясь тем самым одним из первооснователей начертательной геометрии.

В сохранившемся 12-томном сочинении «О сельском хозяйстве» («De re rustica») Юния Модерата Колумеллы, относящемуся, вероятно, к 62 г. н. э., вторая глава книги V посвящена землемерным задачам. Здесь читатель знакомится с системой мер, показано решение геометрических задач, но только на конкретных примерах, общие же правила не указаны.

Секст Юлий Фронтин (около 40—103 г.) писал о землемерии, военной технике и акведуках. В последнем сочинении (оконченном около 98 г.) встречается множество вычислений периметров водопроводных труб, в которых принято $\pi = 3\frac{1}{7}$, выраженное приближенно в двенадцатеричных дробях. Фрагменты других сочинений Фронтина, равно и Гигина, Бальба, Цельса, Нипса, Эпафродита, Витрувия Руфа, известны по рукописи, получившей название «Арцерианского кодекса» и относящейся, по-видимому, к VI—VII векам.

Все названные писатели использовали александрийские источники. Геометрия интересовала их преимущественно как прикладная дисциплина, их прозвали «агрименсорами» (землемерами). Интерес к землемерии вырос в связи с развитием частной собственности на землю и переделами общественных земельных владений, участившимися судебными тяжбами о границах земельных участков, где решающим было мнение агрименсоров. Из сходства между употребляемой ими терминологией, являющейся как бы буквальным переводом терминов, применявшихся Героном Александрийским, Кантор ([21], 4-е изд. т. I, стр. 555; [128]) и другие заключали, будто агрименсоры были его учениками, а поэтому определяли время его жизни не позднее I в. н. э., что, однако, оказалось опровергнутым на основании изучения его механических сочинений. Сходство между терминологией и методами агрименсоров и Герона Александрийского следует, таким образом, искать в общем источнике — распространенных у александрийских ученых методах землемерии, перешедших к ним из Египта, а возможно и Вавилона, а от них и к римлянам.

В этом же отрывке встречаются также арифметические предложения, а именно задачи на многоугольные числа.

Однако значительное число ошибок, встречающихся в этих арифметических предложениях, а в особенности то, что здесь помещен чертеж, не имеющий к ним никакого отношения (вписанный в круг правильный 8-угольник с проведенными в нем вспомогательными линиями, снабженными буквенными обозначениями, когда речь идет о ...«восьмиугольных» числах!), показывает, что этот раздел попал в сочинение случайно, ибо агрименсоров не интересовали вопросы теоретической арифметики.

Таким образом, после того как на короткое время, на протяжении полутораста лет, от Цезаря до Траяна, римляне приобщились к математическим знаниям александрийцев настолько, что им не чужды были и теоретико-арифметические исследования, а следовательно, и связанные с ними алгебраические понятия, они перестали понимать соответствующие греческие сочинения даже в латинском переводе.

О практических знаниях римлян в математике можно получить некоторое представление и на основе их юридических и экономических сочинений. Римляне издавна применяли проценты, против взимания которых еще в 342 г. до н. э. был издан закон, конечно, не соблюдавшийся. Вычисление процентов принадлежало к общераспространенным знаниям. Велись также вычисления, в которых учитывалось вероятное время пользования тем или другим благом, как указывает Ульпиан, живший в конце II и в начале III в. н. э., однако, определялась ли вероятная продолжительность жизни и как именно, из этого замечания заключить нельзя.

Довольно сложные расчеты были связаны с наследственным правом. Случай, получивший большую известность и вошедший в многочисленные учебники как права, так и математики, таков: Некто, умирая, завещал, что если его беременная жена разрешится мальчиком, то мальчик должен унаследовать $\frac{2}{3}$ имущества, а жена $\frac{1}{3}$; если же родится девочка, она получит $\frac{1}{3}$, а жена $\frac{2}{3}$; однако родилась двойня — мальчик и девочка. Как распределить завещанное имущество? О связанных с этим спорах сообщают видные римские юристы. Живший в середине II в. н. э. Сальвиан Юлиан предложил следующее решение: Нужно все наследство разделить на семь равных частей, из которых сын получил четыре, мать — две и дочь — одну часть. Ибо таким путем сын, в соответствии с завещанием, получит вдвое больше, чем мать, а мать — вдвое больше, чем дочь.

Современником Сальвиана Юлиана был Апулей из Мадавра, римской колонии в Северной Африке (около 135—180 гг.), обучавшийся в Афинах. Апулей известен как автор сатирического романа «Золотой осел», однако он был автором и ряда математических сочинений. Апулей перевел на латынь «Арифметику» Никомаха, ему приписывают также учебник практической арифметики для купцов.

Герон. Одним из виднейших математиков-энциклопедистов древности, писавшим почти по всем вопросам математики, механики, астрономии и физики, был Герон Александрийский, прозванный также Герон-механик. Даты жизни этого выдающегося инженера и ученого настолько спорны, что одно время полагали, будто он жил в начале I в. до н. э., или даже раньше, между тем как теперь склоняются к тому, что его жизнь и деятельность падает на время между Птолемеем и Паппом, т. е. в III в. н. э. Герон писал для инженеров, архитекторов, мастеров-ремесленников, его сочинения преследуют больше прикладные, чем теоретические цели. Им было создано практическое и теоретическое руководство по геодезии, служившее этой цели на протяжении многих веков. Вместе с тем Герон высоко развил вычислительную математику, доводя решение задач при помощи геометрической алгебры до конкретных цифровых результатов в том виде, в каком они нужны для практики.

В чисто теоретической области Герон оставил после себя комментарии к «Началам» Евклида.

В другом сочинении, «Определения», Герон излагает «технические термины, употребляемые в геометрии, опираясь на учение Евклида, автора начал теоретической геометрии». Ценность этого сочинения в том, что здесь даны различные определения отдельных геометрических понятий в их историческом развитии.

«Метрика» Герона. Наиболее важным геометрическим сочинением Герона является его «Метрика» [129] (учение об измерении) в трех книгах.

Книга I содержит правила измерения площадей и поверхностей. Здесь дана формула для вычисления площади неравностороннего треугольника, так называемая «формула

Герона», которая, по-видимому, была известна еще Архимеду, и которую Герон доказывает с помощью вписанного круга.

Герон дает численные примеры, причем и такие, где требуется извлечение квадратных корней, приводящее к иррациональностям.

Герон применяет вавилонский метод приближенного извлечения квадратного корня, египетский способ записи дробей и изложения правил. Таким образом, у Герона восточные традиции еще сильнее, чем у Гиппарха и Птолемея.

Для правильного семиугольника, вписанного в круг радиуса r, Герон считает, что приближенное значение его стороны $a=\frac{7}{8}r$, а также, что a приближенно равно расстоянию центра круга от стороны вписанного в него правильного шестиугольника, т. е. $\frac{r}{2}\sqrt{3}$. Для круга он приводит архимедово значение $\pi=\frac{22}{7}$, а также найденные Архимедом более точные границы, по мнению Герона, малопригодные для практики.

Книга I оканчивается указанием, как определить площади неправильных плоских фигур, а также неправильных поверхностей. В первые вписывается многоугольник так, чтобы его контур не отличался слишком сильно от криволинейного контура фигуры, и площадь многоугольника находится как сумма площадей треугольников, его составляющих. Вторые следует покрыть кусками тонкой бумаги или материи, а затем распрямить и измерить их площадь.

Книга II посвящена измерению объемов. Она заканчивается указанием, что Архимед измерял объемы неправильных тел, погружая их в воду и определяя объем вытесненной ими жидкости.

Книга III занимается делением фигур на части, находящиеся в заданном отношении друг к другу, причем как плоских фигур, так и тел — пирамиды, конуса и шара. Герон следует здесь за сочинением Евклида «О делении (фигур)» и частично за трактатом Аполлония «Об отсечении площади» и трактатом Архимеда «О шаре и цилиндре». Однако он решает и немало оригинальных задач.

При делении объемов приходится извлекать кубический корень, и Герон излагает метод его приближенного нахождения.

«Геометрия» Герона. Другое сочинение Герона, «Геометрия» [130], имеет содержание, подобное «Метрике». Однако здесь правила не доказываются и даже не формулируются в общем виде, а прямо применяются к решению примеров, причем, по египетскому способу, каждый пример иллюстрируется целым рядом численных случаев, из которых читателю предоставляется усвоить общее правило. Здесь также употребляется египетский способ записи дробей. Длины и площади выражены в частных мерах и много внимания уделено переводу одних мер в другие.

В «Геометрии» решаются еще квадратные уравнения; содержатся также и 13 задач на неопределенные уравнения. Так, требуется найти два прямоугольника таких, чтобы периметр второго был равен трем периметрам первого, и чтобы площадь первого была равна трем площадям второго. Здесь помещены также задачи о нахождении прямоугольного треугольника с рациональными сторонами и данной площадью или с данной суммой площади и периметра.

Сочинение Герона «Стереометрия», кроме измерения объемов геометрических тел, включает и измерение объемов зданий, театров и амфитеатров, бассейна для плавания, колодца, корабля, винной бочки и т. п. «Геодезия» представляет собой выдержку из «Геометрии», относящуюся к треугольникам. Сочинение «Измерения», приписываемое Герону, содержит опять-таки указания об измерении как геометрических фигур, так и различных сосудов, каменных глыб разной формы, столбов, башен, сводов и др. Аналогичное содержание имело и сочинение «Геопоника» (о землеустройстве).

Важным сочинением Герона является «Диоптра». Так назывался прибор, служивший древним вместо современного теодолита.

После подробного описания этого прибора здесь сначала решаются задачи на «высоты и расстояния», как-то: определить разность уровней двух точек, провести прямую, соединяющую две точки, из которых одна невидима, измерить наименьшую ширину реки и др. В сочинении дано также описание годометра (прибора для измерения пройденного повозкой пути).

Сочинения Герона по механике и оптике. Труд Герона «Механика» начинается описанием механизма из зубчатых колес для перемещения данного груза при помощи данной силы. Здесь рассматривается движение колес и цилиндрических валов, и Герон замечает, что круг, а также цилиндр и шар являются наиболее подвижными фигурами.

Герон пытается решить так называемый «парадокс Аристотеля», содержащийся в его «Механике», т. е. объяснить, почему большой круг проходит с малым одинаковое расстояние, если они имеют общий центр. Ведь в то время, когда они катятся врозь, пройденные ими прямые расстояния относятся друг к другу как их диаметры.

Затем Герон доказывает, что равномерные движения складываются по параллелограмму из подобия треугольников AEG и ACD (рис. 43), где точка A движется равномерно по прямой AB, в то время как эта прямая, оставаясь параллельной себе, движется равномерно до положения CD, причем EF — промежуточное положение.

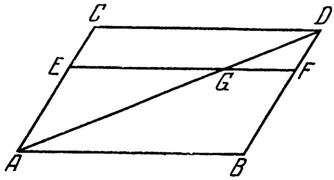


Рис 43.

Герон далее рассматривает движение тела по наклонной плоскости, центры тяжести, пять простейших механических машин: колесо и его ось, рычаг, ворот, клин и винт.

Оставляя в стороне труды Герона прикладного механического характера, содержавшие знания по баллистике, теории жидкостей и газов и представляющие большой интерес для истории физики и техники, его работы по построению военных машин, водяных часов и автоматов, отметим еще, что в сочинении «Катоптрика» (часть оптики, изучающая зеркальные изображения) Герон дал доказательство равенства углов падения и отражения, исходившее из натурфилософского принципа, что «природа ничего не делает напрасно», и что поэтому свет распространяется по прямой, т. е. кратчайшим путем. И Герон доказывает, что из всех ломаных линий $ПNГ$ (рис. 44), ведущих от предмета $П$ к зеркалу $З$, а затем к глазу $Г$, кратчайшей будет та, обе части которой образуют с зеркалом равные углы, т. е. $ПAГ$.

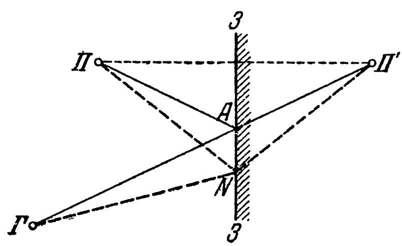


Рис. 44.

Папп. О Паппе Александрийском известно лишь, что он жил в конце III в. н. э. и занимался восстановлением позабытых классических математических знаний.

Основным трудом Паппа является его «Собрание» [131] в восьми книгах, — исчерпывающее руководство по геометрии, написанное сжато и ясно, с глубоким и всесторонним знанием предмета. В нем содержится множество исторических сведений, указано около 30 различных авторов, благодаря чему оно служит важным источником по истории математики.

Первая книга этого сочинения, а также первая половина второй книги (13 предложений) утеряны. Вторая половина книги II посвящена октадам Аполлония.

Книга III состоит из четырех частей. Часть I излагает историю задачи нахождения двух средних пропорциональных между двумя отрезками.

Часть II излагает теорию разного рода средних.

Часть III содержит ряд геометрических парадоксов, взятых из сочинения «Парадоксы» Эрикина, предшественника или современника Паппа. Здесь, например, доказывается, что могут быть построены треугольники (или параллелограммы), стороны которых больше сторон заданного треугольника (параллелограмма), но площадь меньше.

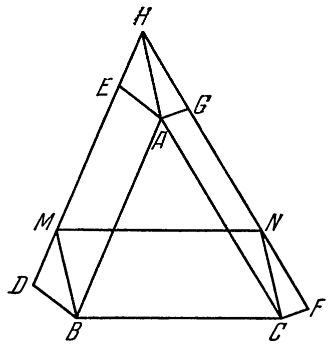


Рис. 45.

В части IV решается задача о вписывании правильных многогранников в сферу, причем Папп поступает совершенно иначе, чем Евклид.

Книга IV состоит из пяти частей. Часть I содержит интересное обобщение (так называет его сам Папп) теоремы Пифагора. Если на сторонах AB и AC треугольника ABC (рис. 45) построим произвольные параллелограммы $ABDE$ и $ACFG$, затем продолжим DE и FG до их пересечения H, и, соединив H с A, проведем BM и CN параллельно HA, то параллелограмм $BCNM$ будет равен сумме параллелограммов $ABDE$ и $ACFG$.

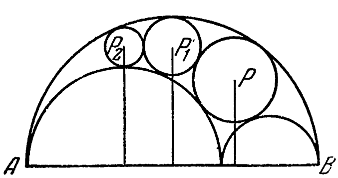


Рис. 46.

В части II рассматриваются круги, вписанные в «áрбелос» (резак) Архимеда. Здесь остроумно доказывается, что если в эту фигуру (рис. 46) вписан ряд кругов с центрами P, P_1, P_2, ..., из которых первый касается всех трех полукругов, а остальные двух, и если диаметры вписанных кругов равны d, d_1, d_2, ..., а перпендикуляры, опущенные из их центров на AB, равны p, p_1, p_2, ..., то имеет место $p = d$.

В частях III и IV Папп занимается квадратурой круга и трисекцией угла. Для построения квадратрисы Папп, кроме механического метода, предложил два других, использующих либо пересечение винтовой поверхности плоскостью, либо пересечение прямого кругового конуса с прямым цилиндром, имеющим основанием спираль Архимеда. Затем следует отступление, посвященное спирали на шаровой поверхности. Применив метод исчерпывания, Папп доказывает, что площадь поверхности между спиралью и квадрантом BC относится к площади полушария как площадь кругового сегмента BC к площади кругового сектора OBC.

В последней части книги IV рассматривается деление угла на три или более равных частей при помощи вставки.

Книга V открывается крайне интересным, написанным прекрасным литературным языком предисловием «О рассудочности пчел». В нем говорится, что «хотя боги наделили лишь человека разумом, животным они дали инстинкт... Так, пчелы не считают подходящим небрежно выливать мед где попало, а собрав ароматы с красивейших цветков, они сначала строят из них сосуды, называемые сотами, все равные, подобные, взаимно соприкасающиеся. Однако только три прямоугольные правильные фигуры, — треугольник, квадрат и шестиугольник, — удовлетворяют этому условию, и пчелы избрали для построения своих сот ту фигуру, которая имеет больше всего углов, потому что они заключили, что она будет содержать больше меда, чем другие, при одинаковой затрате материала на него. Мы же, претендующие на то, что обладаем большей мудростью, чем пчелы, займемся исследованием более общей задачи, а именно тем, что из всех плоских фигур с равными сторонами и углами, обладающими равным периметром, наибольшую площадь имеет та, у которой наибольшее число углов, и из всех плоских фигур равного периметра наибольшую площадь имеет круг» ([131], т. I, стр. 304—309).

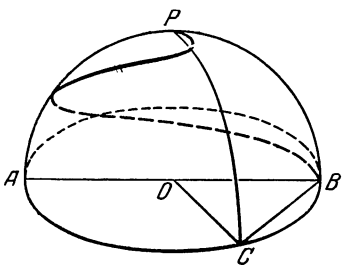


Рис. 47.

Понятно, что Паппу простительно незнание того, что удивительно целесообразная форма пчелиных ячеек является не следствием намеренного плана и божественного предначертания, а следствием приспособления в результате естественного отбора. Недоумение могут вызвать лишь подобные наивные взгляды, когда они продолжают высказываться в настоящее время поборниками теолого-телеологического взгляда на мир, неотомистами (последователями Фомы Аквинского) Ж. Маритеном, Э. Жильсоном и др.

Вся книга V посвящена изопериметрическим задачам. Папп подчеркивает, что до него их решали аналитическим методом, между тем как он применяет собственный, синтетический, считая его более ясным и коротким. Он также отмечает, что философы утверждали, будто мир имеет форму шара, самого «совершенного», наиболее красивого и самого большого из всех тел равной поверхности, но что доказательства последнего положения они не дали. Сам Папп доказывает, что шар по объему больше любого правильного многогранника, имеющего равную с ним поверхность, а также и конуса и цилиндра.

Книга VI «Собрания» — астрономическая. Она посвящена исправлению ошибочных предложений, встречавшихся в списках астрономических сочинений Теодосия, Евклида, Менелая, Автолика и Аристарха. Математический интерес представляет исследование кажущейся формы круга, видимого из точки, не лежащей в его плоскости, вопрос, которым занимался еще Евклид в своей «Оптике».

Книга VII особенно ценна тем, что в ней дано довольно подробное описание сочинений, входивших в так называемую «Сокровищницу анализа», состоявшую из сочинений Евклида, Аполлония и Аристея и служившую пособием для повышенного математического образования. Папп приводит в связи с этим определение анализа и синтеза.

Следует отметить, что после описания всех входящих в «Сокровищницу анализа» сочинений, Папп добавляет к «Коническим сочинениям» Аполлония рассуждение о геометрических местах точек, отнесенных к трем или четырем прямым, и замечает, что изучение подобных мест, отнесенных к пяти, шести или более прямым, до его времени не было известно. Папп говорит, что в случае, когда прямых больше, чем шесть, отношение между отрезками не может быть выражено геометрически, так как в геометрии имеются лишь три измерения, хотя некоторые авторы и позволяли себе говорить о прямоугольнике, умноженном на квадрат или прямоугольник, не объясняя толком, что они под этим понимают.

Папп замечает далее, что в его время многие занимаются первыми принципами и естественным источником предмета математического исследования. Он приводит два предложения о телах вращения, предвосхищающие теорему Гюльдена, не приводя, однако, доказательств.

В этой же книге собраны многочисленные леммы, которые должны были облегчить изучение сочинений, вошедших в «Сокровищницу анализа».

Книга VIII посвящена механике, причем проводится различение между теоретической механикой как математической наукой и практической механикой как искусством. Здесь решаются разные задачи, относящиеся к центру тяжести фигур, к движению по наклонной плоскости, например: дан груз, который по горизонтальной плоскости можно двигать с помощью данной силы, и плоскость, наклоненная к горизонту под данным углом; требуется определить силу, необходимую для того, чтобы сдвинуть этот груз вверх по наклонной плоскости.

Папп далее решает задачу о построении конического сечения по пяти точкам, указывая, откуда она произошла. Имеется обломок цилиндрической колонны, причем не сохранилась ни часть основания, ни периметр, и требуется определить ее диаметр. Тогда выбираем две точки A и B на этой цилиндрической поверхности, и проводим из них как из центров пять пар окружностей разных радиусов. Пары окружностей равных радиусов пересекутся в пяти точках, лежащих в одной плоскости, перпендикулярной к AB, и их легко перенести на любую плоскость.

Папп решает также задачу о вписывании в круг семи равных правильных шестиугольников, а также занимается построением зубчатых колес и винтов.

Необходимо отметить одну важную особенность сочинений Паппа. Он употребляет заглавные буквы для обозначения общих чисел, наряду со строчными буквами, которые употребляются для обозначения конкретных чисел. Как мы уже отметили, обозначение величин буквами было введено еще Аристотелем и широко применялось Евклидом и другими математиками эллинистической эпохи, снабжавшими все свои числа-отрезки обозначениями заглавными буквами; однако, намеренно или не преднамеренно, Папп отбросил наглядное изображение. Это был важный шаг, подготовивший появление алгебры. Однако в античной математике алгебраическое обозначение, применяемое для решения уравнений, как система впервые было введено Диофантом.

Диофант. Диофант Александрийский жил, по-видимому, около 250 г. н. э. В греческой антологии, содержавшей уже упоминавшееся стихотворение, приписываемое Евклиду, имелось одно, касающееся дат жизни Диофанта. В нем говорится, что его отрочество составляло $\frac{1}{6}$ его жизни, борода начала расти спустя $\frac{1}{12}$, он женился после $\frac{1}{7}$, и спустя пять лет у него родился сын, который прожил $\frac{1}{2}$ возраста отца, а последний умер спустя четыре года после смерти сына. Отсюда для возраста Диофанта получается уравнение $\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+$ $+5+\frac{1}{2}x+4=x$, откуда $x=84$, если, конечно, эта антология, изданная в VI в. н. э. грамматиком Метродором, передает не вымышленные данные.

Основным сочинением Диофанта является «Арифметики» [132], содержавшее 13 книг, из которых, однако, до нас дошло лишь шесть. В них он последовательно применяет свои алгебраические обозначения. Прежде всего, для неизвестной величины (нашего x), которую Диофант определяет как «содержащую неопределенное множество единиц» и называет ее просто «аритмóс», т. е. «число», он вводит знак, имеющий вид ς'. Числовой коэффициент Диофант пишет рядом после знака неизвестной: так, $\varsigma'\bar{\iota}\bar{\alpha}$ = 11 аритмой = 11 x. Степени неизвестной Диофант обозначает начальными буквами соответствующих греческих названий x^2 — «дю́намис» — $\delta^{\tilde{\upsilon}}$, x^3 — «кю́бос» — $\varkappa^{\tilde{\upsilon}}$, x^4 — «дюнамодю́намис» — $\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}$, x^5 — «дюнамóкюбос» — $\delta\varkappa^{\tilde{\upsilon}}$, x^6 — «кюбóкюбос» — $\varkappa\varkappa^{\tilde{\upsilon}}$. У Диофанта имелись также обозначения для обратных значений неизвестной и ее степеней: $\frac{1}{x}$ — «аритмостóн» — $\varsigma^{\tilde{\varkappa}}$, $\frac{1}{x^2}$ — «дюнамостóн» — $\delta^{\tilde{\upsilon}\tilde{\varkappa}}$ и т. д. Степени выше шестой Диофант не рассматривал. Никаких знаков для действий сложения, умножения и деления у Диофанта не имелось. Сложение обозначалось просто тем, что слагаемые ставились рядом, например, x^3+13x^2+5x записывалось как $\varkappa^{\tilde{\upsilon}}\bar{\alpha}\delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\iota}\bar{\gamma}\varsigma'\bar{\varepsilon}$. Для обозначения единиц в качестве слагаемых применялось сокращение μ° — начальные буквы слова «монóс» — единица; например, x^3+13x^2+5x+2 записывалось как $\varkappa^{\tilde{\upsilon}}\bar{\alpha}\delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\iota}\bar{\gamma}\varsigma'\bar{\varepsilon}\mu^{\circ}\bar{\beta}$. Для вычитания Диофант применял знак $\pitchfork$, — по-видимому, сокращение слова «лейпсис» — «требуется». При этом в многочлене писались сначала все положительные члены, а затем отделенные от них знаком $\pitchfork$ все отрицательные, например, $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ как $x^3 + 8x - (5x^2 + 1)$, т. е. как $\varkappa^{\upsilon}\bar{\alpha}\varsigma'\bar{\eta}\pitchfork\delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon}\mu^{o}\bar{\alpha}$.

Благодаря тому, что Диофант располагал лишь одним-единственным символом для обозначения неизвестной, он был вынужден всякую задачу со многими неизвестными предварительно переформулировать так, чтобы все неизвестные выражались через одну. В случае неопределенных уравнений он принимал вместо некоторых неизвестных произвольные числа, указывая при этом, что можно было принять вместо них и любые другие и поэтому его решение не теряло общности. Для выражения всех неизвестных через одну Диофанту приходилось применять самые разнообразные, иногда весьма хитроумные приемы.

Диофант применял везде только положительные целые числа и дроби. У него не было понятия отрицательной величины. Уравнения, ведущие к таким решениям, он называл невозможными, абсурдными. Иррациональности он также не употреблял, и если встречались иррациональные корни, то у него возникала дополнительная проблема подобрать встречающиеся в них величины так, чтобы результат оказался рациональным.

В «Арифметиках» Диофант решает общим методом определенные уравнения, линейные и квадратные, и лишь в одном частном случае кубическое. Для уравнений вида

$$a_1x^n + b_1 + a_2x^n + b_2 + \ldots = c_1x^n + d_1 + c_2x^n + d_2 + \ldots$$

Диофант указывает общее правило, состоящее в приведении подобных и устранении возможных отрицательных членов путем прибавления к обеим частям уравнения равных величин, пока оно не примет вид $ax^n = b$. После этого задача считается решенной, причем во внимание принимается лишь единственный положительный корень. Коэффициенты a и b должны быть такими, чтобы корень был рациональным. В случае, если уравнение сокращается на x^m, корень $x = 0$ не принимается во внимание.

При решении полных квадратных уравнений трех уже встречавшихся нам видов, дающих положительные корни, Диофант не формулирует общего правила, хотя он обещает это сделать (возможно, что это имелось в утерянной части сочинения), а показывает его на многочисленных примерах. При этом указываются нижние и верхние границы встречающихся иррациональностей и квадратный корень рассматривается с одним только положительным знаком.

Вопрос о том, знал ли Диофант о существовании второго корня уравнения, соответствующего квадратному корню с отрицательным знаком, много дискутировался. Однако не подлежит сомнению тот факт, что в геометрическом виде, при применении *геометрической* алгебры, существование двух решений рассматривалось еще Евклидом в его «Началах» ([92], т. 1, кн. II, предложения 5, 6; кн. VI, предложения 27, 28, 29).

Диофант рассматривал системы уравнений, ведущие к полному квадратному уравнению, а именно:

$$x+y=2a, \qquad xy=b, \tag{1}$$
$$x+y=2a, \quad x^2+y^2=b, \tag{2}$$
$$x-y=2a, \qquad xy=b, \tag{3}$$

которые он решал способом подстановки (пользуясь современным языком), полагая в первых двух случаях $x=a+z$, $y=a-z$, а в третьем случае $x=z+a$, $y=z-a$.

Единственный случай определенного кубического уравнения, который рассматривает Диофант, $x^3+3x-3x^2-1=$ $=x^2+2x$, сводится к уравнению $x^3+x=4x^2+4$, о котором он просто заявляет «откуда находим, что x равен 4», не указывая, получено ли это решение делением на общий делитель x^2+1, или же путем отгадки.

Однако основной вклад Диофанта в математику составляют его методы решения неопределенных уравнений. Поскольку он в качестве решений допускает *любые положительные рациональные* числа, то понятно, что линейными неопределенными уравнениями он не занимается вовсе. Для квадратных, а также и для кубических и биквадратных уравнений, поскольку он их решает, он не ищет обязательно целочисленные корни, как это делают ныне, когда говорят об «уравнениях Диофанта».

Неопределенные квадратные уравнения встречаются в «Арифметиках» прежде всего в виде $Ax^2+Bx+C=y^2$. В зависимости от значений коэффициентов A, B, C возникают различные случаи. Интерес представляет случай $B=0$. Диофант дает способ нахождения произвольного числа корней уравнения $Ax^2+C=y^2$, если известен один из них. Диофант замечает, что это уравнение решается (рационально) лишь тогда, когда A является суммой двух квадратов, и доказывает, что уравнение $Ax^2+C=y^2$ решается (рационально) лишь когда $A+C$ представляет квадрат. В случае полного уравнения $Ax^2 + Bx + C = y^2$ Диофант не сводит его к предыдущему виду, а рассматривает лишь случаи, когда либо A, либо C являются полными квадратами, либо когда таковыми является выражение $\frac{1}{4}B^2 - AC$.

Кроме этих уравнений, Диофант решает и «двойные» («диплойсо́тэс»), т. е. систему

$$\left.\begin{aligned} a_1x^2 + b_1x + c_1 &= y^2, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 &= z^2. \end{aligned}\right\}$$

Простейший случай, когда $a_1 = a_2 = 0$, Диофант решает двумя различными методами. При первом он рассматривает две возможности: либо $b_1 = b_2$, либо c_1c_2 представляет квадрат. Второй метод он применяет лишь для частного случая, когда $c_1 = c_2$ являются квадратами. Когда система полная, Диофант ограничивается лишь тремя возможностями: либо $a_1 = a_2$, $c_1 = c_2$; либо $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $c_1 = c_2$; либо $b_1 = b_2 = 0$.

Неопределенные уравнения высших порядков Диофант рассматривает в виде

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx - M = y^2 \text{ или } y^3,$$

причем в первом случае n не превышает 6, а во втором 3. В «Арифметиках» для y^2 встречается пять вариантов, а когда правая сторона куб — два варианта.

Встречаются и относительно простые случаи систем двух неопределенных уравнений с квадратами и кубами, например: $4x + 2 = y^3$, $2x + 1 = z^2$; здесь $y^3 = 2z^2$, и следовательно, $z = 2$; или же $2x^2 + 2x = y^2$, $x^3 + 2x^2 + x = z^3$; Диофант полагает $y = mx$, откуда $z^3 = \frac{2m^4}{(m^2-2)^3}$, значит, m должно быть равно $\frac{n^3}{2}$.

Общий метод, которым Диофант решал неопределенные уравнения, основывался в случае системы уравнений

$$\alpha x + a = y^2, \qquad (1)$$

$$\beta x + b = z^2 \qquad (2)$$

на тождестве

$$(p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq.$$

Вычитая уравнение (2) из (1), получаем

$$(\alpha - \beta)x + (a - b) = y^2 - z^2.$$

Разлагая левую сторону на множители p и $[(\alpha-\beta)x+$ $+(a-b)]/p$, а правую на множители $y-z$ и $y+x$ и приравнивая их, получаем

$$y \pm z = \frac{(\alpha-\beta)x+(a-b)}{p}, \tag{3}$$

$$y \mp z = p. \tag{4}$$

Складывая (3) и (4) и возводя в квадрат, получим

$$y^2 = \alpha x + a = \frac{1}{4}\left\{\frac{(\alpha-\beta)x+(a-b)}{p}+p\right\}^2,$$

откуда после упрощения получаем

$$(\alpha+\beta)^2 x^2 + 2x\left[(\alpha-\beta)(a-b)-p^2(\alpha+\beta)\right]+$$
$$+(a-b)^2-2p^2(a+b)+p^4=0.$$

Для того чтобы это уравнение стало линейным, либо коэффициент при x^2, либо свободный член должен быть равным нулю. Диофант рассматривает оба эти случая, но, понятно, не в общем виде, а на числовых примерах. Оба случая дают, конечно, лишь частные решения системы (1), (2). Эта система, сводящаяся к уравнению

$$Ay^2 - Bz^2 = C,$$

получила полное решение лишь благодаря созданной Гауссом (1801 г.) теории квадратичных форм.

Поскольку Диофант ищет положительные решения, ему часто приходится определять их так, чтобы они лежали в определенных границах, что приводит, например, к задаче: найти значение x так, чтобы x^n лежало в заданных границах a и b. Диофант умножает a и b сначала на 2^n, затем на 3^n и т. д. так долго, пока не находится число c такое, что имеет место неравенство $ap^n < c^n < bp^n$; тогда он полагает $x = \frac{c}{p}$. Встречаются и более сложные задачи, когда требуется, например, найти значение x так, чтобы $\frac{8}{x^2+x}$ лежало между x и $x+1$.

Особый метод применяет Диофант для решения задачи нахождения двух или трех квадратов, сумма которых равна данному числу, причем каждое из них либо мало отличается от одного и того же числа, либо, в других случаях, должно находиться в известных границах.

Кроме задач, в «Арифметиках» содержатся предложения общего характера, относящиеся к теории чисел. Из них о трех говорится, что они взяты из «Порисмов», — утерянного сочинения Диофанта:

1) если a — данное число, и если x и y такие, что квадратами являются выражения $x+a$, $y+a$ и $xy+a$, то стороны квадратов $x+a$ и $y+a$ отличаются на 1;

2) если n^2 и $(n+1)^2$ — два последовательных квадрата, и если взять еще $4(n^2+n+1)$, то эти три числа обладают тем свойством, что произведение любой пары, увеличенное либо на сумму этих же двух чисел, либо на третье число, является квадратом;

3) разность любых двух кубов является вместе с тем суммой двух кубов.

Среди других предложений отметим те, которые относятся к разбиению числа на сумму двух квадратов:

1) всякий квадрат можно представить сколь угодно многими способами в виде суммы двух квадратов, так как a^2 можно представить как сумму x^2+y^2, где $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}a$, $y=\frac{2t}{1+t^2}a$, t — любая положительная правильная дробь;

2) следовательно, и всякое число, являющееся суммой двух квадратов, может быть представлено сколь угодно многими способами в виде суммы двух квадратов;

3) произведение двух целых чисел, являющихся суммами двух квадратов, может быть представлено в виде суммы двух целых квадратов двумя способами, т. е.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \pm bc)^2;$$

это предложение Диофант применяет для нахождения четырех целочисленных прямоугольных треугольников с общей гипотенузой;

4) для того чтобы единицу можно было разбить на два таких слагаемых, что, прибавив к каждому из них заданное число a, мы получили бы квадраты, необходимо, во-первых, чтобы число a было четным. Второе условие, приводимое Диофантом, нельзя разобрать, так как текст испорчен. Ферма́ доказал, что, кроме первого условия, должно выполняться и второе: число $(2a+1)$, деленное на наибольший квадрат, на который оно делится, не должно давать остатка, делящегося на простое число вида $(4n-1)$. Отсюда следует, что ни одно число вида $(4n+3)$, $(4n-1)$ нельзя представить как сумму двух квадратов.

Диофант указывает также одно частное условие для того, чтобы число вида $(3a+1)$ не разбивалось на три квадрата, а именно, a не должно иметь вида $(8b+2)$.

Для того чтобы дать читателю представление о богатстве содержания труда «Арифметики», послужившего для математиков нового времени, начиная с Ферма́, источником дальнейших плодотворных исследований, приведем некоторые, наиболее типичные примеры. Так, среди определенных уравнений имеется задача (I, 39): даны два числа a и b; найти число x такое, чтобы числа $(a+x)b$, $(b+x)a$, $(a+b)x$ образовали в каком-нибудь порядке (зависящем от их значений) арифметическую прогрессию. Интересна система (IV, 15):

$$\left.\begin{aligned} (y+z)\,x&=a,\\ (z+x)\,y&=b,\\ (x+y)\,z&=c.\end{aligned}\right\}$$

Диофант принимает z за неизвестное, через которое он выражает x и y, а именно:

$$x=\frac{p}{z},\quad y=\frac{q}{z},\quad x+y=\frac{c}{z};$$

тогда

$$\frac{pq}{2}+p=a,$$

$$\frac{pq}{2}+q=b,$$

откуда $p-q=a-b$. Следовательно, нужно c разбить на две части так, чтобы разность этих частей равнялась $a-b$. Диофант применяет метод ложного положения, взяв сначала p и q произвольно, лишь бы $p+q=c$, а затем внося поправки. Окончательно он получает $z^2=\dfrac{pq}{a-p}$, причем числа a, b, c должны быть такими, чтобы z было рациональным.

Из неопределенных уравнений второго порядка укажем уравнение (II, 9):

$$x^2+y^2=a^2+b^2,$$

решаемое подстановкой $x=z+a$, $y=m-b$. Решаются и такие системы, как (III, 5):

$$x+y+z=t^2,\ y+z-x=u^2,\ z+x-y=v^2,\ x+y-z=w^2,$$

а также столь сложные, как (III, 19):

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2+x_1=y_1^2,\ \ldots,\ (x_1+x_2+x_3+x_4)^2+x_4=y_4^2.$$

Некоторые задачи Диофант формулирует занимательно. Так, в книге V задача 30 гласит: «Некто купил некоторое количество мер вина, одного по 8, другого по 5 драхм. Он заплатил за них квадратное число драхм; и если прибавить к этому 60, то получится квадрат, сторона которого равна всему количеству мер. Найди, сколько куплено и по какой цене». В общем случае ($8 = m$, $5 = n$, $60 = a$) задача записывается как система:

$$mx + ny = u^2,$$
$$u^2 + a = (x+y)^2.$$

Следовательно, ответ гласит, что количество мер по пяти драхмам равно $\frac{79}{12}$, а количество мер по восьми драхмам равно $\frac{59}{12}$.

Из неопределенных уравнений высших порядков укажем лишь в виде примера следующие:

1) (IV, 6) $x^3 + y^2 = u^2, \quad z^2 + y^2 = v^3,$

2) (IV, 11) $x^3 - y^3 = x - y,$

3) (V, 29) $x^4 + y^4 + z^4 = u^2.$

Здесь Диофант полагает $u = x^2 - p$, откуда получает

$$x^2 = \frac{p^2 - y^4 - z^4}{2p}.$$

Он принимает $p = y^2 + 4$, $z = 2$, вследствие чего получается

$$x^2 = \frac{4y^2}{y^2+4}.$$

Положив $y^2 + 4 = (y+1)^2$, он получает

$$y = 1\frac{1}{2}, \; y^2 = 2\frac{1}{4}, \; z^2 = 4, \; p = 6\frac{1}{4},$$

или же, после умножения на 4, $y = 3$, $z = 4$, $p = 25$, $x = \frac{12}{5}$.

Наконец, в «Арифметиках» имеется ряд задач на построение прямоугольных треугольников, чьи стороны, выражаясь рациональными числами, должны удовлетворять данным условиям.

Сохранился также фрагмент сочинения Диофанта «О многоугольных числах». Изложение здесь следует методу геометрической алгебры, а поэтому очень громоздко и запутано. Диофант решает задачи о нахождении многоугольного числа по его стороне и, наоборот, стороны по числу. Последним неоконченным предложением, обрывающимся на полуслове, является задача о нахождении количества возможных представлений данного числа в виде многоугольного числа.

Сочинения Диофанта «Порисмы» и «Мориастика» (учение о дробях) утеряны. На первое Диофант ссылается в «Арифметиках», второе содержало, должно быть, учение о дробях, однако сохранилось только его название.

Следует отметить, что в то время как Папп возглавлял, быть может, целую математическую школу, алгебраическое направление не получило дальнейшего развития в античной математике. Как и в других областях культуры, следовавшие за Диофантом математики стран Римской империи были более лишь комментаторами, чем самостоятельными созидателями.

Спор. Из современников Паппа в конце III в. жил Спор, автор компилятивного сочинения «Кэрия́», содержавшего, среди прочего, изложение задач квадратуры круга и удвоения куба и критику метода Гиппия с его квадратрисой, а также необоснованную критику приближения $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$ Архимеда для π.

Порфирий, Ямблих. Порфирий (233—304 гг.), ученик виднейшего представителя мистической философской школы неоплатонизма Плотина, написал комментарии к «Началам» Евклида. Его учеником был Ямблих, происходивший из Халкиды в Сирии (умер около 330 г.). Он написал девять сочинений о секте пифагорейцев, из которых сохранились четыре. Наибольший интерес для истории математики представляет книга IV «О введении в арифметику Никомаха». Здесь Ямблих приводит различные предложения пифагорейцев о квадратных и «продолговатых» числах, т. е. о числах вида $n(n+1)$.

Далее Ямблих приводит следующее предложение. Если взять три последовательных числа, из которых последнее делится на 3, и сложить их вместе, а затем сложить в полученном числе число единиц, десятков, сотен и т. д., в полученном таким путем числе проделать то же самое, то, повторяя последовательно эту операцию, мы получим, наконец, число 6.

Эта теорема, доказательство которой в общем виде дал Лориа ([133], стр. 841), возникла на почве «пифагорейского исчисления», служившего для «предсказывания будущего». Складывая цифровые значения какого-нибудь имени, пифагорейцы принимали во внимание лишь «питмен» («основание», см. стр. 77) каждого числа (например, для ψ, обозначающего 700, «питмен» 7, обозначаемое как ζ), и с полученной суммой «питменов» поступали таким же образом, пока не доходили до числа, меньшего 10, которое и считалось «питменом» данного имени.

Ямблих приводит также метод решения некоторого вида систем линейных уравнений, носящий название «эпáнтема» (цветение) Тимарида, математика времен Платона. Этот метод, применявшийся к системе

$$x+x_1+x_2+\ldots x_n=a, \quad x+x_1=a_1,$$
$$x+x_2=a_2, \ \ldots, \ x+x_n=a_n,$$

он распространяет на систему неопределенных уравнений, решаемых в целых числах. Занимаясь совершенными числами, из которых он знал лишь первые четыре: 6, 28, 496 и 8128, известные уже Никомаху, Ямблих высказал предположение, что они распределены регулярно, что в каждой из мириад встречается по одному (одно до 10^8, затем одно до 10^{12} и т. д.), что неверно.

Серен. Одним из тех комментаторов, благодаря которым до нас дошли сведения об утерянных трудах классиков античной математики, является Серен из Антинои в Египте, живший, вероятно, в IV в., в период между Паппом и Теоном Александрийским. Он написал комментарий к утерянным «Коническим сечениям» Аполлония, а также к сохранившимся сочинениям «О сечениях цилиндра» и «О сечениях конуса». В первом из них Серен, как он сам указывает, желает рассеять ошибку, разделяемую изучающими геометрию, будто сечения цилиндра отличаются от эллипса — сечения конуса. Последняя часть этой работы посвящена вопросу о форме тени цилиндра на плоскости, вызванному тем, что геометр Пейтон, друг Серена, написавший трактат о параллельных, подвергался несправедливой критике за свое утверждение, что тень цилиндра на плоскости имеет вид параллелограмма.

Сочинение «О сечениях конуса» занимается треугольными сечениями прямых и косых круговых конусов, получаемыми пересечением конуса плоскостью, проходящей через его вершину.

Серен изучает вопрос о том, когда площадь треугольника при различных заданных условиях (например, заданном периметре) становится максимальной.

Теон Александрийский. В конце IV в. жил известный математик Теон Александрийский. Он был автором комментариев к «Алмагесту» Птолемея в 11 книгах, сочинение, которое хотя и не обнаруживает в Теоне крупного математика, но содержит ценные исторические сведения и дает представление о способе, которым александрийские математики того времени пользовались шестидесятеричными дробями, как производили умножение, деление, извлечение квадратного корня, в особенности приближенное. Так, например, при делении $1515°20'15''$ на $25°12'10''$ (записанных, разумеется, буквенными знаками), он поступает так:

Делитель	Делимое		Частное
$25°12'10''$		$1515°\,20'\,15''$	1-й член $60°$
		$25°\cdot 60 = 1500$	
	Остаток	$15 = 900'$	
	Сумма	$920'$	
		$12'\cdot 60 = 720'$	
	Остаток	$200'$	
		$10''\cdot 60 = 10'$	
	Остаток	$190'$	
		$25\cdot 7' = 175'$	
	Остаток	$15' = 900''$	2-й член $7'$
	Сумма	$915''$	
		$12'\cdot 7' = 84''$	
	Остаток	$831''$	
		$10''\cdot 7' \quad 4''\,10'''$	
	Остаток	$829''\,50'''$	
		$25\cdot 33'' = 825''$	3-й член $33''$
	Остаток	$4''\,50''' = 290'''$	
		$12'\cdot 33'' = 396'''$	
	Избыток	$106'''$	

Таким образом, частное немного меньше, чем $60°\,7'\,33''$.

Теон Александрийский издал текст «Начал» Евклида, причем частично приспособил его для лучшего понимания учащимися, внес в него и некоторые дополнения и, со своей точки зрения, исправления. Этот текст был весьма распространен в Средние века. Кроме «Начал», Теон издал также «Оптику» Евклида. И, быть может, приписываемая Евклиду «Катоптрика» является сочинением Теона.

Гипатия. Дочь Теона, Гипатия Александрийская (370—415 гг.) философ, математик, астроном и врач, последовательница неоплатонизма. Как указывает сам Теон, Гипатия принимала участие в составлении его комментариев к «Алмагесту». Как сообщает Свида (X в.), Гипатия написала комментарии к Диофанту и к «Коническим сечениям» Аполлония. По-видимому, именно благодаря этому и сохранились первые шесть книг «Арифметик» Диофанта, так как комментарии Гипатии к ним служили источником дальнейших списков, а остальные семь книг «Арифметик», к которым комментариев не было, были забыты. Гипатия, прославленная красноречием и ученостью (ее причисляли к наиболее авторитетным язычникам Александрии), была растерзана толпой фанатиков-христиан, подстрекаемых александрийским епископом Кириллом. Такая же фанатичная толпа за двадцать лет до этого разгромила александрийскую библиотеку. Таким образом, был уничтожен главный научный центр Римской империи.

Упадок математики в странах Римской империи являлся неизбежным следствием общего упадка рабовладельческого строя в этих странах. Экономический и политический распад античного общества и распространение крайне реакционных мистических философских учений и религиозных культов привели к тому, что наука в этих странах оказалась беззащитной перед ударами варваров и религиозных изуверов.

Прокл. После гибели александрийской научной школы языческая культура и наука некоторое время сохраняется в Афинах. Сюда переезжает из Александрии Прокл (410—485 гг.), возглавивший здесь философскую школу неоплатоников и прозванный «Диадохом» (преемником). Им написано большое количество философских работ, в том числе комментариев к диалогам Платона. Для математики наибольшее значение имеют его комментарии к книге I «Начал» Евклида [78], являющиеся одним из важнейших источников истории геометрии. При составлении своих «Комментариев» Прокл пользовался рядом трудов, которые затем были утеряны, и сведения об этих трудах дошли до нас лишь благодаря ему. Прежде всего, это «История геометрии» Евдема, затем работа Гемина, носившая, по-видимому, название «Учение» или «Теория математики», очень обширная, освещавшая, в частности, классификацию математических наук, далее комментарии к «Началам» Евклида, Герона, Порфирия и Паппа, какой-то труд Аполлония по элементарной геометрии, трактат Птолемея о постулате параллельных, сочинение Посидония против Зенона Сидонского и др. Прокл, преподававший математику, иногда употребляет прямо обращение «мои слушатели». Его «Комментарии» были предназначены для начинающих, о чем он прямо говорит, указывая, что трудные вопросы (в частности, кривые, применяемые для решения задачи трисекции угла) он временно опускает. Однако его труд предназначался, по-видимому, затем и для более широких кругов, и тогда в него были включены разделы о винтовой линии, конхоиде и циссоиде, недоступные для начинающих.

«Комментарии» начинаются двумя введениями. В первом говорится об отношении математики к философии, а также о классификации математики. Во втором — о геометрии и ее предмете, согласно Платону, Аристотелю и другим авторам древности. Затем следует изложение истории математики, заканчивающееся панегириком Евклиду. Наконец, после объяснения различия между теоремами и «проблемами», со ссылкой на высказывания различных авторитетов по этому вопросу, дан сжатый обзор всего содержания книги I «Начал».

Приступая затем к ее комментированию, Прокл разбирает по порядку исторически и критически каждое определение, постулат и аксиому, после чего переходит к предложениям. Как правило, он сначала объясняет доказательство, данное Евклидом, потом указывает несколько конкретных примеров для упражнения, и в конце опровергает возражения, которые делались или могут быть сделаны относительно выставленных аргументов доказательства. Лишь в одном случае он добавляет самостоятельно от себя новое, а именно, пытаясь доказать постулат о параллельных после того, как он привел попытку Птолемея и возражения против нее. Здесь он опирается на неявное предположение о том, что расстояние между непересекающимися прямыми, лежащими в одной плоскости, ограничено, и поэтому Прокл считает, что если две прямые, выходящие из одной точки и образующие угол, продолжить до бесконечности, то расстояние между ними при их продолжении до бесконечности превышает любую конечную величину и, в частности, расстояние между двумя указанными прямыми. Неявное предположение Прокла на деле является равносильным доказываемому постулату.

Для примера приведем отрывок из Прокла:

«... мы говорим, что согласно большинству мнений, геометрия была впервые открыта в Египте, имея свое происхождение в измерениях площадей. Ибо для египтян это было необходимо вследствие подъемов Нила, которые стирали подлинные границы земель всякого. И никоим образом не удивительно, что открытие этой, равно как и других наук, имеет своим источником практические нужды, принимая во внимание, что все, что начинается, движется от несовершенного к совершенному. Таким образом, переход от чувства к разуму и от разума к пониманию прост, естествен. Итак, так же как точная арифметика началась у финикиян, будучи обязанной своему применению в торговле и договорах, так геометрия была открыта в Египте из-за причин выше изложенных» ([78], стр. 64—65).

Сохранилось также сочинение Прокла, представляющее собой введение в учение Гиппарха и Птолемея.

Домнин, Аммоний, Евтокий. Современником Прокла был Домнин из Ларисcы, также являвшийся неоплатоником, автор «Руководства к введению в арифметику». Это — сжатое и последовательное изложение учения о числах, опирающееся на Евклида и направленное против негеометрического способа изложения Никомаха. К тому же времени относится и Аммоний Александрийский, написавший ряд комментариев, в том числе один к введению Порфирия к Аристотелю, где высказано предложение, что число сочетаний из n элементов по два равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Около 500 г. н. э. жил Евтокий, комментатор Архимеда и Аполлония. Он написал комментарии к трем сочинениям Архимеда «О шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «О равновесии плоскостей» и к первым четырем книгам «Конических сечений» Аполлония.

Ученики Прокла. К началу VI в. относится также Марин из Неаполя в Палестине (прежний Сихем), ученик и биограф Прокла. Ему принадлежит комментарий к «Данным» Евклида, в котором главное внимание уделено вопросу, что следует понимать под «данным» в геометрии. Марин указывает, что разные авторы давали этому понятию различные определения: Аполлоний понимал под «данным» то, что неизменно, Диодор то, что известно, Птолемей то, что точно или приближенно измерено, а другие сочетали эти идеи, считая, что это то, что может быть познано. К этому же времени относится и Исидор Александрийский, возглавлявший философскую школу в Афинах, математические сочинения которого неизвестны даже по названию, и его преемник Дамаский из Дамаска, занявший этот пост около 510 г., которому приписывается авторство книги XV «Начал» Евклида.

В первой половине VI в. жил ученик Дамаския, комментатор Аристотеля Симпликий. В 529 г., когда Юстиниан в фанатичной борьбе против «язычества» запретил преподавание философии в Афинах, Симпликий эмигрировал вместе со своим учителем в Персию, но в 533 году он вернулся вновь в Афины. В своем комментарии он приводит две обширные выдержки из «Истории геометрии» Евдема. Симпликий написал также комментарий к книге I «Начал» Евклида.

На Симпликии заканчивается история языческой математики, развивавшейся на греческом языке. Более поздние математики, писавшие по-гречески, были христианами, мы рассмотрим их труды в главе о математике в средневековой Европе.

Математика последнего века Западной Римской империи. Если математика на греческом языке, бывшим основным языком науки как в эллинистических странах, так и в странах Римской империи, переживает в IV—V в. упадок, то еще больший упадок переживает в это время математика на латинском языке.

От IV века сохранился фрагмент латинского перевода выдержек из XII и XIII книг «Начал» Евклида, ошибочно названных здесь XIV и XV книгами. Эта геометрическая рукопись сохранилась в виде палимпсеста — текста, полустертого с пергамента, на котором в IX в. были написаны теологические размышления папы Григория; на этом же пергаменте в виде палимпсестов сохранились и выдержки из Вергилия и Тита Ливия.

С течением времени математические знания римлян становятся все скуднее по содержанию. Последними сочинениями, имеющими некоторое отношение к математике, написанными в Риме до его падения (445 г.), являются сочинения грека Амбросия Теодосия Макробия, появившиеся около 400 г. Математика представлена здесь несколькими рассуждениями, рассеянными среди грамматических, исторических и мифологических сведений.

Математика в Италии при остготах. После падения Рима и возникновения в Италии остготского королевства Теодориха появляется несколько математических сочинений, примыкающих к математике Римской империи. Около 460 г. появился «счет» (Calculus) Виктория (или Викторина), содержащий таблицы для действия с двенадцатеричными дробями. В девятитомном энциклопедическом труде «Сатира» Марциана Минея Феликса Капеллы из Карфагена, написанном около 470 г., воздается хвала Евклиду, однако ни геометрия, ни землемерие не излагаются здесь. Арифметика представлена числовой мистикой.

Магнус Аврелий Кассиодор (около 475—570 г.), государственный деятель эпохи остготов в Италии, дал в своем энциклопедическом труде «Об искусствах» пересказ сведений о греческих и римских геометрах и арифметиках, а также ряд весьма расплывчатых определений. Кассиодору приписывается также сочинение «Исчисление пасхалий», вышедшее в 562 г. Появление подобных сочинений, ставших затем характерными для средневековой литературы, было вызвано постановлением Никейского церковного собора (325 г.), запрещающего христианам праздновать пасху в одно время с евреями. Еврейская пасха связана с еврейским лунным годом, в который, когда разница между ним и солнечным годом достигает одного месяца, вставляется 13-й месяц. Вследствие этого дата пасхи по солнечному календарю является передвижной. Поэтому было установлено, что христианская пасха должна праздноваться в воскресенье после первого новолуния, наступающего после весеннего равноденствия, а в случае, когда эти даты совпадают, в следующее за этой датой воскресенье. Таким образом, задача состояла в том, чтобы знать, на какие дни в неделе выпадут день весеннего равноденствия и день ближайшего после него полнолуния, что зависит от определенных циклов, содержащих без остатка как солнечный, так и лунный год. Никейский собор принял ошибочно 19 солнечных лет равными 235 лунным месяцам вместо 235 месяцев, и, примерно, $1\frac{1}{2}$ часам. Вскоре убедились в необходимости исправить эту ошибку, и начались поиски точного соотношения, так называемого «золотого числа», или эпакта.

Другой государственный деятель того же времени, друг Кассиодора, философ-неоплатоник Аниций Манлий Северин Боэций (родился около 480 г., казнен в 524 г.), учившийся в Афинах, автор комментариев к логическим сочинениям Аристотеля и Порфирия, трактата «О музыке» и теологически-этического произведения «Об утешении философией», писал также математические работы. Не будучи даровитым математиком, Боэций занимает тем не менее видное место в истории этой науки благодаря его переводам. Он перевел «Арифметику» Никомаха, а также первые три книги «Начал» Евклида. Впрочем, это были не точные переводы, а приспособленные; в книгу Никомаха были включены численные примеры, в книгах Евклида Боэций опустил доказательства. Боэцию приписываются «Введение в арифметику», «Введение в геометрию», равно как и астрономические сочинения, рукописи которых сохранились с IX в. Первое представляет собой обработку «Арифметики» Никомаха, причем не в выгодную сторону.

В целом, это сочинение показывает, что его автор недостаточно разбирался в предмете. Созданное в Средние века вокруг этого сочинения почтение объясняется как раз его непонятностью, а также тем нимбом мученичества, которым католическая церковь окружила Боэция. Она провозгласила его борцом против арианской «ереси» и святым, в то время как на деле он оказался жертвой политической борьбы между римской аристократией, которой он сочувствовал, и остготским владычеством. Что же касается геометрии, то громадное большинство знатоков средневековых рукописей считает, что это одна из многочисленных подделок, столь распространенных в это время. В этом псевдо-Боэции, наряду с изложением простейших геометрических предложений из I, II, а частично и из III и IV книг «Начал» Евклида, приведенных без доказательства, дано описание счета на абаке, причем с конусообразными шашками («апексами»), снабженными цифрами от 1 до 9, и указаны правила умножения и деления, — последние весьма не ясно. Несмотря на то, что это сочинение является фальсификацией, возможно IX—XI вв., оно тем не менее дает верное представление об уровне математических знаний, если не самого Боэция, то вообще римлян этой поздней эпохи. Что же касается самого Боэция, то его значение состоит в том, что благодаря его переводам европейские народы получили в Средние века первые знания греческого математического наследства, что вместе с громадной работой, проделанной в этом отношении арабами, евреями, персами, таджиками, узбеками, азербайджанцами, армянами и др., подготовило математику эпохи Возрождения.

Необходимо упомянуть еще сочинение анонима из Шартра (Франция), относящееся, возможно, ко времени, предшествовавшему Боэцию. В нем площадь треугольника вычисляется по так называемой формуле Герона, площадь шаровой поверхности как учетверенная площадь большого круга, отношение периметра круга к его диаметру принимается равным $\frac{22}{7}$, но вместе с тем формулы многоугольных чисел автор не понимает, считая их формулами для вычисления площадей многоугольников и помещая их поэтому среди геометрического текста.

Найдена также латинская рукопись «Об измерении югартов» («югерум» — римская мера земли, 240 на 120 футов), возможно VI—VII вв. Она полна ошибочных правил, так, например, площадь четырехугольника вычисляется как произведение средних арифметических противоположных сторон, площадь круга как произведение $\frac{1}{4}$ периметра на самое себя, т. е. здесь считается, что $\pi = 4$. В этой рукописи особенно резко проявилось то, что в мире римско-латинской культуры все больше терялось понимание подлинно математических сочинений, что математические знания, за исключением самых элементарных, приходили во все больший упадок.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. К. Маркс, Капитал, т. 1, М., 1952.
2. Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, М., 1952.
3. Ф. Энгельс, Диалектика природы, М., 1952.
4. К. Маркс и Ф. Энгельс, Немецкая идеология, изд. 2, т. 3, М., 1955.
5. К. Маркс и Ф. Энгельс, Об Англии, М., 1953.
6. К. Маркс и Ф. Энгельс, Избранные письма, М., 1957.
7. В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Сочинения, изд. 4, т. 14, М., 1947.
8. В. И. Ленин, Философские тетради, М., 1947.
9. В. И. Ленин, Сочинения, изд. 4.
10. А. Н. Колмогоров, Математика, БСЭ, т. 26, изд. 2, 1954.
11. Ф. Кэджори, История элементарной математики, перев. с англ., под ред., с примеч. и прибавл. И. Ю. Тимченко, изд. 2, Одесса, 1917.
12. Г. Г. Цейтен, История математики в древности и в Средние века, перев. П. С. Юшкевича, предисл. М. Я. Выгодского, изд. 2, подготовл А. П. Юшкевичем, М.—Л., 1938.
13. R. C. Archibald, Outline of the history of mathematics, 6^{th} ed., Oberlin, Ohio, 1949.
14. E. T. Bell, The development of mathematics. 2^{d} ed., N. Y.—L., 1940.
15. E. Bortolotti, Storia della matematica elementare. Enciclopedia delle matematiche elementari o complementi, vol. 3_2, Milano, 1950.
16. C. B. Boyer, The concepts of the calculus. 2^{d} ed., N. Y., 1949.
17. C. B. Boyer, History of analytic geometry., N. Y., 1956.
18. A. von Braunmühl, Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie, Bd. 1—2, Leipzig, 1900—1903.
19. F. Cajory, A history of mathematical notations, vol. 1—2, Chicago, 1928—1930.
20. F. Cajori, A history of mathematics., N. Y., 1929.
21. M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. 1—2, Aufl. 3, Leipzig, 1907 u. folg. Поправки см. в Bibliotheca mathematica, Folge 3 (Kleine Bemerkungen zur letzten Ausgabe von Cantors Vorlesungen), Aufl. 4, Bd. I, Leipzig, 1922.

22. J. Coolidge, A history of geometrical methods, Oxford, 1940.
23. J. Coolidge, A history of the conic sections and quadric surfaces, Oxford, 1945.
24. E. Fettweis, Das Rechnen der Naturvölker, Leipzig, 1927.
25. S. Günther, Geschichte der Mathematik, Teil 1, Leipzig, 1908.
26. J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bd. 1, Berlin, 1953.
27. G. Loria, Guido allo studio della storia della mathematiche, ed. 2, Milano, 1946.
28 G. Loria, Storia delle matematiche dall' alba della civiltá al secolo XIX, ed. 2, Milano, 1950.
29. K. Menninger, Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl, Teil 1—2, Göttingen, 1957—1958.
30. G. Sarton, Introduction to the history of science, vol. 1—3, Baltimore, 1927—1947.
31. D. E. Smith, History of mathematics, vol. 1—2, Boston — London, 1930.
32. D. J. Struik. A concise history of mathematics, vol. 1—2, N. Y., 1948.
33. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung. 2. Aufl., Bd. 1—7, Berlin — Leipzig, 1921—1934; 3. Aufl., Bd. 1—4, 1930—1940.
34. История естествознания, Литература, опубликованная в СССР, т. 1 (1917—1947), М.—Л., 1949, т. 2 (1948—1950), М.—Л., 1955.
35. И. П. Павлов, Полное собрание трудов, т. 3, М.—Л., 1949.
36. M. Dobritzer, Geschichte der Abiponer, Wien, 1884.
37. L. Lévy-Bruhl, Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures, Paris, 1910.
38. L. Lévy-Bruhl, La mentalité primitive, Paris, 1925.
39. J. Eisenstädter, Elementargedanke und Übertragungstheorie in der Völkerkunde, Jena, 1912.
40. J. Morgan, Life and Adventure of William Buckley. Hobart (Tasmania), 1952.
41. M. Косвен, Происхождение обмена и меры ценности, М.—Л., 1927.
42. Гомер, Илиада, перев. В. В. Вересаева, М.—Л., 1949.
43. А. А. Драгунов, Исследование по грамматике современного китайского языка, М.—Л., 1952.
44. Н. Н. Миклухо-Маклай, Путешествия, т. 1, М.—Л., 1940.
45. Ю. Липперт, История культуры, СПб., 1895.
46. W. Wundt, Elemente der Völkerpsychologie, Leipzig, 1912.
47. О. Шрадер, Индоевропейцы, СПб., 1913.
48. А. Мейе, Введение в сравнительное изучение индоевропейских языков, М.—Л., 1938.
49. Э. Тэйлор, Первобытная культура, М., 1939.
50. В. Даль, Толковый словарь живого великорусского языка, т. 4, СПб., 1882.

51. В. И. Авдиев, История Древнего Востока, М., 1948.

52. Политическая экономия, Учебник, М., 1960.

53. Древний мир, Сборник источников по культурной истории Востока, Греции и Рима, под ред. Б. А. Тураева и И. Н. Бороздина, М., 1915.

54. The Rhind Mathematical Papyrus, ed. T. E. Peet, London, 1923.

55. The Rhind Mathematical Papyrus, ed. A. B. Chace, L. Bull, H. P. Manning, R. C. Archibald, vol. 2, Oberlin, Ohio, 1927—1929.

56. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum der schönen Künste in Moskau, Hersgeg. und komment. von W. W. Struve unter Benutzung einer hierogliphischen Transkription von V. A. Turajew, Berlin, 1930.

57. М. Я. Выгодский, Алгебра и арифметика в древнем мире, М.—Л., 1941.

58. K. Vogel, Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik, München, 1929.

59. С. А. Яновская, К теории египетских дробей. — В кн.: «Труды Ин-та истории естествознания и техники», т. 1, 1947.

60. O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechung, Berlin, 1926.

61. Б. Л. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука, Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции, перев. И. Н. Веселовского, М., 1959.

62. S. N. Kramer, Schooldays, A Sumerian Composition relative to the Education of a Scribe. «Journal of the American Oriental Society», 1949, vol. 69, № 4.

63. F. Thureau-Dangin, Textes mathématiques Babylonies, Leiden, 1938.

64. O. Neugebauer, Mathematische Keilschrifttexte, Berlin, 1934—1937.

65. O. Neugebauer — A. Sachs, Mathematical cuneiform texts, vol. 1—3, New-Haven, 1945.

66. О. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук, М.—Л., 1937.

67. И. Н. Веселовский, Вавилонская математика. — В кн.: «Труды Ин-та истории естествознания и техники», т. 5, М., 1955.

68. Hildegard Lewy, Origin and development of sexagesimal system of numeration. — «Journal of the American Oriental Society», vol. 69, № 1, 1949.

69 М. Я. Выгодский, Математика древних вавилонян, «Успехи матем. наук», 1941, № 7—8.

70. E. M. Bruins, Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniennes, Paris, 1952.

71. O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity, 2^{d} ed., Brown University, Press, 1957.

72. S. G. Morley, The civilization of Maya, California, 1946.

73. J. E. Thompson, Maya arithmetics, Washington, 1941.

74. L. Satterthwaite, Concepts and structures of Maja calendrica arithmetics, Philadelphia, 1947.

75. Г. Н. Попов, Культура точного знания в древнем Перу, Пгр., 1922.

76. Геродот, История в девяти книгах, перев. Ф. Г. Мищенко, М., 1888.

77. Аристотель, Метафизика, перев. А. О. Кубицкого, М.—Л., 1934.

78 Procli Diadochi in primum Euclidis elementoium librum commentarii, ed. G. Fridelein, Leipzig, 1873.

79. G. Milhaud, Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique, Paris, 1911.

80. Th. Hoptner, Orient und Griechische Philosophie, Leipzig, 1925.

81. A. Frajese, La matematica nel mondo antico, Milano, 1951.

82. Демокрит в его фрагментах и свидетельствах древности, М., 1935.

83. K. Vogel, Beiträge zur griechischen Logistik, München, 1936.

84. K. Reidemeister, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig — Berlin, 1940.

85. Платон, Политика или государство, Сочинения, т. 3, перев. В. И. Карпова, СПб., 1863.

86. Аристофан, Комедии, т. 1, перев. под ред. А. Малецкого, М.—Л., 1934.

87. Л. Н. Толстой, Война и мир, т. 3, М., 1949.

88. Античная философия (фрагменты и свидетельства), под ред. Г. Ф. Александрова, М., 1940.

89. P. Tannery, Mémoires scientifiques, vol. 3, Paris, 1912—1913.

90. E. Frank, Plato und die sogenannten Pythagoräer, Halle, 1923.

91. Aristotle, De caelo, The works of Aristotle, transl. J. L. Stocks, vol. 2, Oxford, 1930.

92. Евклид, «Начала», перев. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. I, кн. I—IV, М.—Л., 1948; т. II, кн. VII—X, М.—Л., 1949; т. III, кн. XI—XV, М.—Л., 1950.

93. P. H. Michel. De Pythagore á Euclide, Paris, 1950.

94. A. Rey, La science dans l'antiquité, vol. I—III, Paris, 1930—1939.

95. Аристотель, Физика, перев. В. И. Карпова, М., 1937.

96. B. L. van der Waerden, Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. — «Mathematische Annalen», 1940, Bd. 117.

97. С. Я. Лурье, Теория бесконечно малых у древних атомистов, М.—Л., 1935.

98. Simplicius, Physica, Berlin, 1882—1895.

99. Платон, Менон, Сочинения, перев. В. И. Карпова, т. 2, СПб., 1863.

100. Аристотель, Аналитики первая и вторая, перев. Б. А. Фохта, М., 1952.

101. И. Г. Башмакова; Арифметические книги «Начал» Евклида. В кн.: «Историко-математические исследования, вып. 2, М. — Л., 1949.

102. М. Я. Выгодский, «Начала» Евклида. В кн.: «Историко-математические исследования», вып. 1, М.—Л., 1948.

103. В. Н. Молодший, Был ли Евклид последователем Платона? В кн.: «Историко-математические исследования, вып. 2, М.—Л., 1949.

104. Л. Е. Майстров, О статье М. Я. Выгодского «„Начала“ Евклида». В кн.: «Историко-математические исследования», вып. 2, М.—Л., 1949.

105. Euclide, Les données, Oeuvres en grec, en latin et en français. Ed. F. Pevrard, vol. 3, Paris, 1818.

106. Д. Д. Мордухай-Болтовской, Поризмы и данные.— В кн.: «Труды совещания по истории естествознания», М., 1948.

107. Архимед, Послание к Эратосфену о некоторых теоремах механики. В кн.: И. Гейберг, Новое сочинение Архимеда. Перев. И. Ю. Тимченко, Одесса, 1909.

108 T. Heath, A history of Greck Mathematics, vol. 1—2, Oxford, 1921.

109. Archimède, De l'equilibre des planes on des contres de gravité des planes, Oeuvres complétes, trad. P. Ver. Eecke, Paris — Bruxelles, 1921.

110. Archimède, La quadrature de la parabole. Oeuvres complètes, trad. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles, 1921.

111. А. П. Юшкевич, О методе исчерпывания древних математиков. — В кн.: «Труды совещания по истории естествознания», М., 1948.

112. Архимеда две книги: О шаре и цилиндре, Измерение круга и леммы, Перев. Ф. Петрушевского, СПб., 1823.

113. Archimède, Des spirales, Oeuvres complètes trad. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles, 1921.

114. И. Г. Башмакова, Дифференциальные методы в работах Архимеда. В кн.: «Историко-математические исследования», вып. 5, М., 1953.

115. Архимед, О плавающих телах. В кн.: Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль. Начала гидростатики, перев. и примеч. А. Н. Долгова, изд. 2, М.—Л., 1933.

116. Архимед, Измерение круга. В кн.: Ф. Рудио, О квадратуре круга, составил Ф. Рудио, перевод под редакцией и с примечаниями С. Н. Бернштейна, изд. 3, М.—Л., 1936.

117. Архимед, Исчисление песчинок («Псаммит»), перев. и примеч. Г. Н. Попова, М.—Л., 1932.

118. А. Чвалина, Архимед, М.—Л., 1934.

119. С. Я. Лурье, Архимед, М.—Л., 1945.

120. В. Ф. Каган, Архимед, М.—Л., 1949.

121. Аполлоний Пергский, Конические сечения с коммент. Евтокия, перев. И. Ягодинского. — «Изв. Северо-Кавказского университета», т. 3 (15), Ростов н/Д., 1928 (первые 20 предложений книги I).

122. Apollonius de Perga, Les coniques, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1923.

123. Б. А. Розенфельд, Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера. В кн.: «Историко-математические исследования», вып. 10, М., 1957.

124. M. Krause, Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Nasr Mansūr b. ʻAbī b.ʼIrāq. mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematiker, Berlin, 1936.

125. Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic, transl. M. L. D'Ooge, Ann. Arbor, 1938.

126. Ptolemäus, Syntaxis mathematica, ed. J. L. Heiberg, Bd. 1—2, Leipzig, 1898.

127. Витрувий, Десять книг об архитектуре, перев. Ф. А. Петровского, М., 1936.

128. M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Feldmeßkunst, Leipzig, 1875.

129. Hero Alexandrinus, De mensuris, Opera quae supersunt omnia, t. 5, ed. J. L. Heiberg, Leipzig, 1914.

130. Hero Alexandrinus, Geometrica, Opera quae supersunt omnia., t. 4, ed. J. L. Heiberg, Leipzig, 1912.

131. Pappi Alexandrini, Collections quae supersunt. ed. F. Hultsch, Bd. 1—2, Berlin, 1877.

132. Diophante d'Alexandrie, Les six livres arithmétiques et la livre de nombres polygones, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1928

133. G. Loria, La scienze esatte nell'antica Grecla, Milano, 1914.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Кольман Эрнест.
История математики в древности.

Редакторы *Н. А. Угарова, А. Н. Копылова.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Е. А. Белицкая.*

Сдано в набор 7/X 1960 г. Подписано к печати 2/III 1961 г. Бумага 60×90/16. Физ. печ. л. 14,75. Условн. печ. л. 14,75. Уч.-изд. л. 14,04. Тираж 13 000 экз. Т-03108. Цена книги 85 коп. Заказ 1873.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Измайловский пр., 29.